

Contrats de microcrédit à double sanction sociale : une approche markovienne de la viabilité incitative

Microcredit contracts with dual social sanctions: a Markovian approach to incitative sustainability

ANDRIAMANANTENA Philibert

Doctorant

Ecole Doctorale Modélisation Informatique de l'Université de Fianarantsoa-Madagascar
Laboratoire de Mathématique et Application de l'Université de Fianarantsoa

ABDOU Issouf

Enseignant Chercheur

Université des Comores

Dynamique Economique et Juridique des secteurs Informels et Formels

RAVELOMANANA Mamy Raoul

Professeur titulaire, agrégé des Universités en sciences économiques

Université d'Antananarivo

Centre de Recherches Economiques pour le Développement

RAKOTOZAFY Rivo

Maître de conférences

Université de Fianarantsoa

Laboratoire de Mathématique et Application de l'Université de Fianarantsoa

Date de soumission : 16/07/2025

Date d'acceptation : 04/10/2025

Pour citer cet article :

ANDRIAMANANTENA. P. & Al. (2025) « Contrats de microcrédit à double sanction sociale : une approche markovienne de la viabilité incitative », Revue Française d'Economie et de Gestion « Volume 6 : Numéro 10 » pp : 577- 601.

Author(s) agree that this article remain permanently open access under the terms of the Creative Commons

Attribution License 4.0 International License



Résumé

Cet article propose une modélisation markovienne du contrat de microcrédit à double sanction sociale, combinant une sanction institutionnelle (exclusion graduelle) et une sanction communautaire (pression sociale et réputation). L'analyse stationnaire permet d'identifier les conditions de viabilité et de mettre en évidence l'effet disciplinaire de la double sanction sur les comportements opportunistes. Afin d'accroître la pertinence empirique, le modèle est étendu à une distribution continue de risques (loi bêta), à une réputation dynamique et à une règle optimale de calibrage des sanctions. Sur le plan opérationnel, trois scénarios de mise en œuvre sont proposés : probation, fidélisation avec sanction croisée, et réintégration conditionnée à la réputation. Ces résultats contribuent à la littérature sur les contrats incitatifs en microfinance en conciliant rigueur analytique et applicabilité pratique.

Mots clés : Microfinance ; Chaîne de Markov ; Sanction sociale ; Réputation ; Viabilité stationnaire.

Abstract

This article develops a Markovian model of a microcredit contract with dual social sanction, combining an institutional penalty (graduated exclusion) with a community-based mechanism (social pressure and reputation). The stationary analysis identifies the viability conditions and highlights the disciplinary effect of dual sanction on opportunistic behavior. To increase empirical relevance, the model is extended to continuous risk distributions (Beta law), dynamic reputation, and an optimal sanctioning rule under inclusion constraints. At the operational level, three implementation scenarios are proposed: probation, loyalty with cross-sanction, and reputation-based reintegration. These results contribute to the literature on incentive-compatible microfinance contracts by reconciling analytical rigor with practical applicability.

Keywords : Microfinance ; Markov chain ; Social sanction ; Reputation ; Stationary viability.

Introduction

L'accès au microcrédit repose sur des mécanismes contractuels qui doivent concilier deux impératifs souvent contradictoires : garantir l'inclusion financière des populations vulnérables et maintenir une discipline de remboursement suffisante pour assurer la viabilité des institutions de microfinance (IMF). Depuis les expériences pionnières du prêt solidaire, la littérature a largement souligné le rôle des sanctions sociales et institutionnelles comme instruments de discipline. Pourtant, chacune de ces approches présente des limites : les sanctions purement institutionnelles, telles que l'exclusion définitive, sont coûteuses et risquent de fragiliser l'inclusion, tandis que les sanctions exclusivement communautaires, reposant sur la pression des pairs, manquent parfois de crédibilité en l'absence d'un dispositif formel.

La question centrale qui guide ce travail est donc la suivante : comment concevoir un mécanisme contractuel qui parvienne à discipliner les comportements opportunistes tout en évitant les exclusions excessives, de manière à préserver à la fois la soutenabilité financière et la mission sociale des IMF ?

Pour répondre à cette problématique, nous proposons un contrat à double sanction sociale, qui articule deux leviers complémentaires : une sanction institutionnelle, reposant sur une exclusion graduelle, et une sanction communautaire, fondée sur la réputation et la pression du groupe. Afin d'analyser rigoureusement ce dispositif, nous recourons à une chaîne de Markov avec revenu, modélisant l'évolution de l'emprunteur à travers différents états (demande, probation, inclusion stable, exclusion temporaire). Ce cadre analytique permet de calculer le revenu actualisé stationnaire de l'institution et d'évaluer la viabilité du contrat.

Les résultats montrent que la combinaison des deux sanctions renforce la discipline de remboursement tout en maintenant une fenêtre de viabilité élargie. Toutefois, afin de mieux refléter la diversité des comportements observés sur le terrain et d'augmenter la portée opérationnelle du modèle, plusieurs extensions sont introduites. D'une part, l'intégration de distributions continues de risque (via une loi bêta) permet de dépasser la distinction binaire entre emprunteurs prudents et risqués. D'autre part, l'ajout d'une réputation dynamique et d'un processus d'apprentissage traduit l'évolution de la relation de crédit dans le temps. Enfin, la formalisation d'une politique optimale de sanction, assortie d'une contrainte d'inclusion minimale, fournit un outil de calibration pratique pour les IMF.

Sur le plan applicatif, nous proposons également trois scénarios opérationnels illustrant comment ce contrat peut être mis en œuvre : une phase probatoire centrée sur la sanction sociale, une phase de fidélisation associant taux préférentiel et sanction croisée, et une phase de

réintégration conditionnée par la réputation. Ces déclinaisons traduisent les résultats théoriques en mécanismes concrets, contribuant à relier la modélisation mathématique aux réalités de la microfinance contemporaine.

En définitive, ce travail entend combiner rigueur analytique et pertinence pratique en posant la double sanction comme une réponse crédible à la tension fondamentale entre inclusion et discipline. Il ouvre également la voie à de futures recherches empiriques sur le calibrage des paramètres et l'évaluation comparative des contextes institutionnels.

1. Revue de la littérature

Les travaux sur le microcrédit ont d'abord mis l'accent sur la discipline de remboursement assurée par les contrats de groupe. Les contributions de [6] et [12] ont montré que la solidarité entre emprunteurs crée des incitations croisées limitant le risque moral. Cependant, cette approche a rapidement révélé ses limites, notamment la persistance d'effets de passager clandestin et l'exclusion de certains profils vulnérables [11, 9].

Face à ces difficultés, de nombreux auteurs ont étudié les contrats individuels avec sanction institutionnelle. Dans ces modèles, la discipline repose sur des mécanismes formels tels que l'exclusion définitive, la saisie d'actifs ou la révision défavorable du taux d'intérêt [5, 7]. Si ces sanctions renforcent la viabilité financière, elles sont coûteuses à mettre en œuvre et risquent de fragiliser l'inclusion sociale des emprunteurs.

À l'opposé, d'autres contributions insistent sur la force des sanctions informelles issues des dynamiques communautaires. Les travaux de [13] et [10] soulignent le rôle de la réputation et de la pression des pairs dans la réduction des défauts de paiement. Toutefois, lorsque ces mécanismes ne sont pas adossés à une règle institutionnelle crédible, leur efficacité tend à diminuer, en particulier dans les environnements marqués par une forte mobilité sociale ou une hétérogénéité accrue des emprunteurs.

Plus récemment, la littérature a cherché à combiner les deux approches en explorant des contrats hybrides. Certaines études mettent en avant la complémentarité entre sanction institutionnelle et sanction sociale pour renforcer la discipline de groupe [4, 8]. Cependant, peu de travaux proposent une formalisation rigoureuse de ces mécanismes dans un cadre dynamique permettant de capturer à la fois l'évolution des emprunteurs et les flux de revenu des IMF.

Notre contribution s'inscrit dans ce prolongement. Nous proposons un contrat à double sanction sociale formalisé à l'aide d'une chaîne de Markov avec revenu, afin de représenter l'évolution stochastique des emprunteurs entre inclusion, probation et exclusion. Ce cadre permet de

calculer les conditions stationnaires de viabilité et d'évaluer l'impact disciplinaire de la double sanction.

En outre, nous répondons à plusieurs recommandations de la littérature récente. Premièrement, nous introduisons une distribution continue du risque (par exemple via une loi bêta) pour refléter l'hétérogénéité réelle des profils d'emprunteurs, au-delà de la distinction binaire prudent/risqué. Deuxièmement, nous intégrons la réputation dynamique et l'apprentissage, suivant la perspective d'une sanction évolutive qui s'adapte à l'historique de remboursement. Troisièmement, nous explorons une politique optimale de sanction, sous contrainte de maintenir un seuil minimal d'inclusion, afin de proposer aux IMF une règle de calibrage pratique. Enfin, nous traduisons ces résultats théoriques en scénarios opérationnels de mise en œuvre (probation, fidélisation, réintégration), renforçant ainsi la valeur applicative du modèle.

Ainsi, cet article contribue à la littérature en reliant trois dimensions rarement articulées simultanément : (1) une formalisation mathématique rigoureuse des contrats de microcrédit à double sanction, (2) des extensions reflétant la diversité et la dynamique des emprunteurs, et (3) des implications pratiques directement mobilisables par les IMF.

2. Méthodologie

2.1. Hypothèses du modèle

Afin de modéliser le comportement des emprunteurs dans le cadre de contrats de microcrédit, nous considérons une population hétérogène d'agents économiques, caractérisés par le niveau de risque de leur projet. Ce risque est résumé par une probabilité de succès, notée $\alpha \in (0, 1)$, que nous supposons connue de l'emprunteur mais non observable par l'institution. Deux types d'emprunteurs sont distingués :

les emprunteurs prudents, dont le projet a une probabilité de succès P_h relativement élevée ;

les emprunteurs risqués, dont le projet présente une probabilité de succès plus faible, notée $P_l = 1 - P_h$. Tous les projets génèrent un gain $V > 0$ en cas de succès, et rien en cas d'échec. Cette structure binaire permet de simplifier l'analyse sans perte de généralité conceptuelle. Le cadre repose sur les hypothèses suivantes :

(H1) Ordre de risque. Les projets prudents sont systématiquement plus sûrs que les projets risqués : $P_h > P_l$ Cela garantit une différenciation nette entre les deux profils d'emprunteurs.

(H2) Rentabilité espérée. L'espérance de gain dépend du type de projet :

— Pour un projet prudent : $P_h V > 0$, ce qui le rend viable ;

— Pour un projet risqué : $P_l V < 0$, ce qui signifie que son rendement social est insuffisant, justifiant son exclusion.

Cette hypothèse reflète le fait que certains projets, bien que réalisables, présentent une espérance de perte pour l'institution.

(H3) Mécanisme de sanction sociale. En cas de défaut de remboursement, une sanction est infligée à l'emprunteur, selon le contrat en vigueur :

Dans un prêt individuel, seule l'institution impose une sanction sociale partielle d'intensité ϕS , avec $\phi \in [0, 1]$.

Dans un prêt groupé, une double sanction sociale de niveau $(1 + \phi)S$ est appliquée : ϕS par l'institution et S par la communauté ou le groupe.

La sanction sociale, qu'elle soit partielle ou totale, n'engendre aucun coût financier direct pour l'institution. Elle agit comme un mécanisme d'exclusion symbolique ou relationnelle, réduisant le capital social du mauvais payeur.

Ces hypothèses posent les fondements de notre analyse contractuelle. Elles permettent d'examiner, dans les sections suivantes, les dynamiques comportementales à travers des modèles markoviens de prêt individuel et de prêt groupé, ainsi que les conditions d'existence d'un contrat d'équilibre.

2.2. Modèles de prêt individuel et de prêt groupé

Nous présentons dans cette section les grandes lignes des deux cadres markoviens déjà développés dans nos travaux antérieurs : le modèle de prêt individuel avec période probatoire [2] et le modèle de prêt groupé avec responsabilité conjointe [1]. Ces modèles constituent la base formelle de l'analyse comparative conduite dans les sections suivantes. Pour plus de détails sur les démonstrations et propriétés structurelles, nous renvoyons le lecteur aux articles correspondants.

2.2.1. Rappel du modèle de prêt individuel

Le comportement d'un emprunteur individuel est représenté par une chaîne de Markov homogène $(X_t)_{t \geq 0}$ à temps discret, évoluant dans un espace d'états : $S = \{D, B_0, B_1, I, E^T, \dots, E^1\}$

où chaque état décrit une phase précise du parcours contractuel :

- D : demande de crédit (entrée dans le système) ;
- B_0 : phase probatoire (premier prêt test) ;
- B_1 : prêt standard (activité régulière) ;
- I : inclusion financière (fidélisation, taux réduit) ;
- E^k : état d'exclusion temporaire pour $k = 1, \dots, T$.

Les transitions entre états dépendent de la probabilité de succès α du projet, et du taux de réintégration γ après exclusion. La structure du graphe permet de modéliser des trajectoires contractuelles diverses, intégrant les phases de probation, d'activité stable, d'échec et de retour potentiel.

Le flux de revenu actualisé attendu, noté V^I , est calculé en fonction des transitions probables, des taux d'intérêt r, \bar{r} , et de la richesse brute w de l'emprunteur. Ce flux est utilisé dans la section 3.1 pour définir les conditions d'existence d'un contrat équilibré sous sanction sociale partielle.

2.2.2. Rappel du modèle de prêt groupé

Dans le cas du prêt solidaire, la chaîne de Markov $(X_t)_{t \geq 0}$ est définie sur un ensemble d'états élargi : $S = \{D, B_0, B_1, B_2, I, E^T, \dots, E^1\}$ où :

- B_0 : phase probatoire sans responsabilité mutuelle ;
- B_1 : groupe initialement formé avec succès ;
- B_2 : recomposition de groupe avec un emprunteur fiable ;
- I : inclusion durable avec taux réduit ;
- E^k : exclusion temporaire.

Les transitions reflètent la dynamique du partenariat et les conséquences croisées des défauts. Le succès simultané ou individuel de chaque membre affecte les possibilités d'avancement, de sanction ou d'exclusion. La charge transférable en cas de défaut est prise en compte via le paramètre $q = \theta(1 + r)$.

Le flux de revenu total actualisé, noté V^G , est dérivé selon les trajectoires possibles et les gains nets associés à chaque transition. Ce flux servira, comme dans le modèle individuel, à évaluer l'attractivité du contrat selon le niveau de sanction imposé.

Ces deux cadres, bien que distincts dans leur conception, reposent sur une structure commune de processus stochastique. Ils permettent de formuler une analyse unifiée des effets de la sanction sociale, étudiée en détail à partir de la section suivante.

3. Résultats

3.1. Contrats de prêt sous contrainte de sanction sociale

Nous analysons ici les conditions d'existence d'un contrat d'équilibre dans deux contextes contractuels : le prêt individuel, soumis à une sanction sociale partielle, et le prêt groupé, exposé à une double sanction sociale. L'objectif est de déterminer, pour chaque configuration, l'intervalle de sanction sociale susceptible d'assurer la viabilité du contrat, c'est-à-dire la participation exclusive des emprunteurs prudents.

3.1.1. Contrat individuel avec sanction partielle

Dans le cadre du prêt individuel, l'emprunteur en situation de défaut est soumis à une sanction symbolique d'intensité ϕS , infligée uniquement par l'institution de microfinance. Cette sanction, de nature sociale ou réputationnelle, n'engendre pas de coût monétaire pour l'institution, mais agit comme un mécanisme incitatif, en dissuadant les comportements opportunistes.

La condition d'existence d'un contrat d'équilibre repose sur un double critère :

- Les emprunteurs prudents doivent avoir un gain net positif, c'est-à-dire : $V^I - (1 - P_h)\phi S > 0$
- Les emprunteurs risqués doivent être découragés de participer : $V^I - (1 - P_l)\phi S \leq 0$

En résolvant ces deux inégalités, nous obtenons un intervalle admissible pour le niveau de sanction sociale : $\frac{V^I}{(1 - P_l)\phi} \leq S < \frac{V^I}{(1 - P_h)\phi}$ que nous notons : $\bar{S}_1 := \frac{V^I}{(1 - P_l)\phi}$, $\bar{S}_2 := \frac{V^I}{(1 - P_h)\phi}$

Interprétation :

- Si $S < \bar{S}_1$: la sanction est trop faible, tous les emprunteurs participent, y compris les profils risqués. Le contrat est non sélectif et sous-optimal.
- Si $S \in [\bar{S}_1; \bar{S}_2[$: seuls les emprunteurs prudents trouvent un intérêt à contracter. Le contrat est alors incitatif et stable.
- Si $S \geq \bar{S}_2$: même les emprunteurs prudents se retirent. Le contrat devient non viable. L'efficacité du contrat dépend donc d'un calibrage précis de la sanction, suffisamment dissuasif pour exclure les emprunteurs à haut risque sans compromettre l'adhésion des bons profils.

3.1.2. Contrat groupé avec double sanction

Dans le cadre du prêt groupé, le défaut de remboursement entraîne une sanction plus lourde : l'emprunteur défaillant est pénalisé à la fois par l'institution (sanction partielle ϕS) et par la communauté (sanction totale S), soit un impact global de $(1 + \phi)S$.

La logique incitative reste analogue, mais les expressions changent en raison du niveau de sanction plus élevé. Le contrat est viable si :

- Les emprunteurs risqués sont exclus : $V^G - (1 - P_l)(1 + \phi)S \leq 0$
- Les emprunteurs prudents participent : $V^G - (1 - P_h)(1 + \phi)S > 0$

Cela conduit à l'intervalle suivant : $\frac{v^G}{(1 - P_l)(1 + \phi)S} \leq S < \frac{v^G}{(1 - P_h)(1 + \phi)S}$ noté: $\bar{S}_3 := \frac{v^G}{(1 - P_l)(1 + \phi)S}$, $\bar{S}_4 := \frac{v^G}{(1 - P_h)(1 + \phi)S}$

Interprétation :

- Si $S < \bar{S}_3$: la double sanction est insuffisante, les emprunteurs risqués contractent également.
- Si $S \in [\bar{S}_3; \bar{S}_4[$: seuls les prudents participent. Le contrat atteint un équilibre efficace.
- Si $S \geq \bar{S}_4$: la sanction devient contre-productive, aucun emprunteur ne participe.

Remarque importante :

L'existence d'un tel intervalle est garantie par l'hypothèse $P_h > P_l$, qui assure la stricteté des bornes et la possibilité d'un espace contractuel non vide.

Cette analyse met en évidence un phénomène central : le rôle régulateur du niveau de sanction sociale dans la conception des contrats de microcrédit. Le choix de ϕ et de S permet de structurer l'adhésion, la fidélisation ou l'exclusion selon le profil de risque. Dans la section suivante, nous étendons cette réflexion à l'aide d'illustrations numériques et de simulations graphiques.

3.2. Analyse numérique et illustration graphique

3.2.1. Simulation pour le contrat individuel à sanction partielle

Cette section propose une simulation numérique visant à illustrer l'existence d'un intervalle de sanction sociale garantissant l'équilibre du contrat individuel. Conformément au cadre théorique développé précédemment, nous montrons que le calibrage adéquat de la sanction permet de sélectionner uniquement les emprunteurs prudents.

Choix des paramètres :

Les paramètres suivants sont fixés pour les besoins de la simulation :

- $\alpha = 0,8$: probabilité de succès individuelle ;
- $\delta = 0,9$: facteur d'actualisation ;
- $\gamma = 0,8$: probabilité de réintégration après exclusion ;
- $\phi = 0,5$: poids de la sanction sociale partielle ;
- $w = 2$: richesse brute de l'emprunteur ;
- $r = 0,2$; $\bar{r} = 0,3$: taux d'intérêt normal et préférentiel.

Ces valeurs traduisent un environnement réaliste dans lequel les emprunteurs prudents disposent d'une capacité de remboursement élevée.

Calcul des bornes :

Le flux de revenu actualisé attendu dans l'état $(x, y) = (I, I)$, noté V^I , s'écrit :

$$V^I = \frac{\delta(1 - \delta(1 - \gamma) - \delta^6\alpha(1 - \alpha)\gamma - \delta^2(1 - \alpha)\gamma)}{(1 - \delta\alpha)(1 - \delta(1 - \gamma) - \delta^2(1 - \alpha)\gamma) - \delta^6\alpha(1 - \alpha)\gamma} \cdot (w - (1 + \bar{r}))$$

Les bornes admissibles de sanction sociale sont alors données par :

$$\bar{S}_1 := \frac{V^I}{(1 - P_l)\phi} = \frac{V^I}{\alpha\phi}, \quad \bar{S}_2 := \frac{V^I}{(1 - P_h)\phi} = \frac{V^I}{(1 - \alpha)\phi}$$

Visualisation de l'équilibre :

Le graphique suivant représente l'intervalle de sanction sociale $[\bar{S}_1; \bar{S}_2[$ au sein duquel le contrat individuel est incitatif et viable.

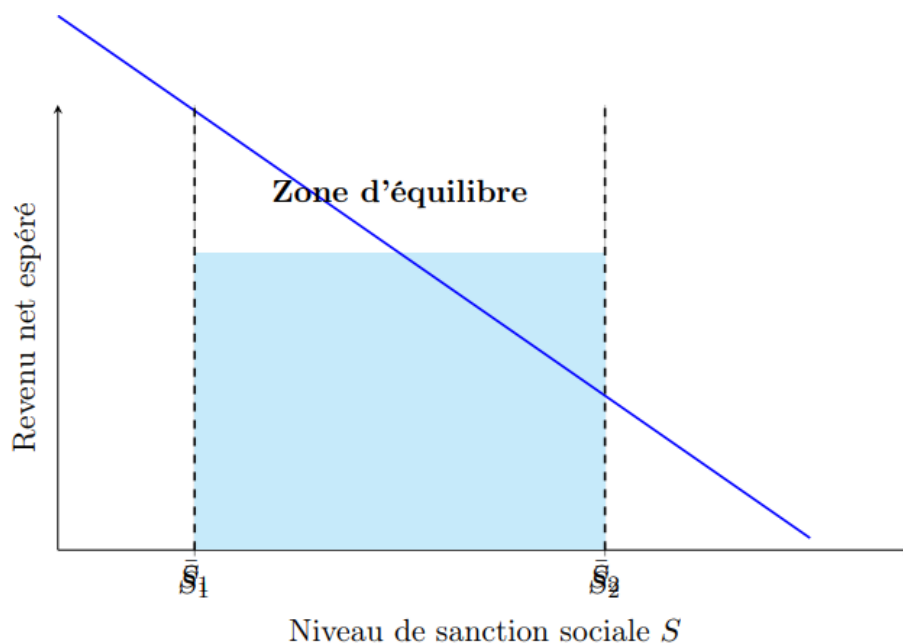


Figure N°1 : Intervalle admissible de sanction dans le contrat individuel

Source : Auteur

Interprétation des résultats :

Le graphique met en évidence trois régimes distincts :

- Lorsque $S < \bar{S}_1$, la sanction est trop faible pour filtrer les emprunteurs risqués : le contrat perd sa capacité sélective.
- Si $S \in [\bar{S}_1; \bar{S}_2[$, seuls les emprunteurs prudents contractent. L'équilibre est atteint.
- Si $S \geq \bar{S}_2$, la sanction devient trop dissuasive : même les bons profils se retirent, rendant le contrat inopérant.

Conclusion de la simulation :

Cette simulation confirme la robustesse du cadre théorique proposé. L'existence d'un intervalle strictement positif pour la sanction sociale constitue une condition nécessaire à la mise en œuvre

d'un contrat de microcrédit stable et incitatif. Elle souligne l'importance du calibrage institutionnel dans le design contractuel, en particulier lorsqu'il s'agit de concilier viabilité financière et inclusion sociale.

3.2.2. Simulation pour le contrat groupé à double sanction

Nous considérons maintenant le dispositif de prêt groupé, dans lequel chaque emprunteur subit deux formes de sanction en cas de défaillance de son partenaire : une sanction communautaire directe (poids 1), et une sanction institutionnelle partielle (pondérée par un facteur $\phi \in (0, 1)$). L'analyse est centrée sur l'état (G, G) , correspondant à une situation où les deux membres du groupe sont actifs et remboursent régulièrement. **Expression du revenu actualisé :**

Le revenu actualisé stationnaire dans l'état (G, G) , noté V^{GG} , s'écrit : $V^{GG} = \delta[\alpha^2 V^{GG} + 2\alpha(1 - \alpha)V^{GN} + (1 - \alpha)^2 V^{NN}] + \delta(w - (1 + \bar{r}))$

où :

- V^{GN} est le revenu dans l'état où un seul membre est actif (l'autre étant exclu temporairement),
- V^{NN} est le revenu dans l'état où les deux membres sont exclus (flux nul),
- Les transitions vers (E^k, \cdot) ou (\cdot, E^k) entraînent une perte par sanction.

La formule complète du revenu stationnaire peut être calculée par itération ou en résolvant un système linéaire, mais pour l'illustration graphique, nous supposons ici une valeur numérique fixée à $V^{GG} = 1.4$.

Définition des bornes de sanction :

La viabilité du contrat groupé impose que la sanction soit suffisamment dissuasive pour les emprunteurs risqués, sans décourager les prudents. Cela conduit à un nouvel intervalle admissible de sanction institutionnelle partielle :

$$\bar{S}_3 := \frac{V^{GG}}{(1 - P_l)(1 + \phi)S}, \quad \bar{S}_4 := \frac{V^{GG}}{(1 - P_h)(1 + \phi)S}, \quad \text{où } P_l \text{ et } P_h \text{ sont les probabilités de continuation pour les types prudents et risqués respectivement, dans un groupe.}$$

Graphique illustratif :

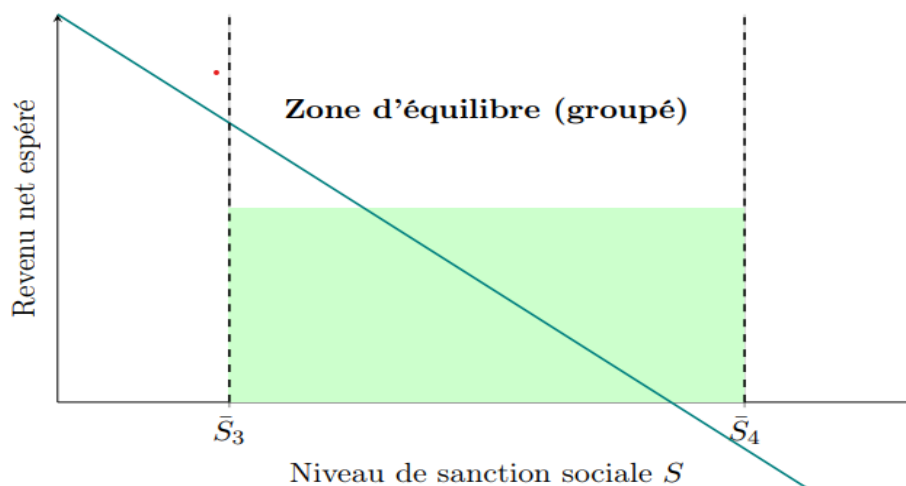


Figure N°2 : Intervalle admissible de sanction dans le contrat groupé

Source : Auteur

Interprétation :

Le graphique met en évidence l'existence d'un intervalle $[\bar{S}_3; \bar{S}_4[$ dans lequel la double sanction joue pleinement son rôle disciplinaire :

- Si $S < \bar{S}_3$: les emprunteurs risqués ne sont pas dissuadés : le groupe devient instable.
- Si $S \in [\bar{S}_3; \bar{S}_4[$: seuls les profils prudents acceptent le contrat, ce qui assure sa viabilité.
- Si $S \geq \bar{S}_4$: même les emprunteurs prudents préfèrent se retirer, ce qui annule le mécanisme de solidarité.

Ce cas met en lumière un effet renforcé de la sanction sociale dans les environnements collectifs, en raison de l'interdépendance entre membres. Cela confirme que le calibrage optimal dépend à la fois du contrat et de la configuration sociale du dispositif.

3.3. Analyse de sensibilité paramétrique

3.3.1. Sensibilité des bornes dans le contrat individuel

Afin d'évaluer la robustesse des résultats obtenus, nous étudions ici l'impact de certains paramètres clés sur l'intervalle d'équilibre du contrat individuel, en particulier sur les bornes

$$\bar{S}_1 \text{ et } \bar{S}_2 \text{ définies par : } \bar{S}_1 := \frac{V^I}{(1-P_l)\phi} = \frac{V^I}{\alpha\phi}, \quad \bar{S}_2 := \frac{V^I}{(1-P_h)\phi} = \frac{V^I}{(1-\alpha)\phi}$$

Nous focalisons cette analyse sur la variable $\phi \in [0, 1]$, représentant l'intensité relative de la sanction sociale partielle imposée par l'institution. Intuitivement, plus ϕ est faible, plus la sanction est modérée. Or, le dénominateur des bornes étant proportionnel à ϕ , une réduction de ϕ élargit l'intervalle admissible.

Effet de ϕ sur la zone d'équilibre :

Le graphique suivant illustre l'évolution des deux bornes \bar{S}_1 et \bar{S}_2 en fonction de ϕ , pour une valeur fixée de V^I . Les courbes montrent que l'intervalle $[\bar{S}_2; \bar{S}_1[$ devient plus large lorsque ϕ diminue, ce qui rend plus probable l'existence d'un contrat équilibré.

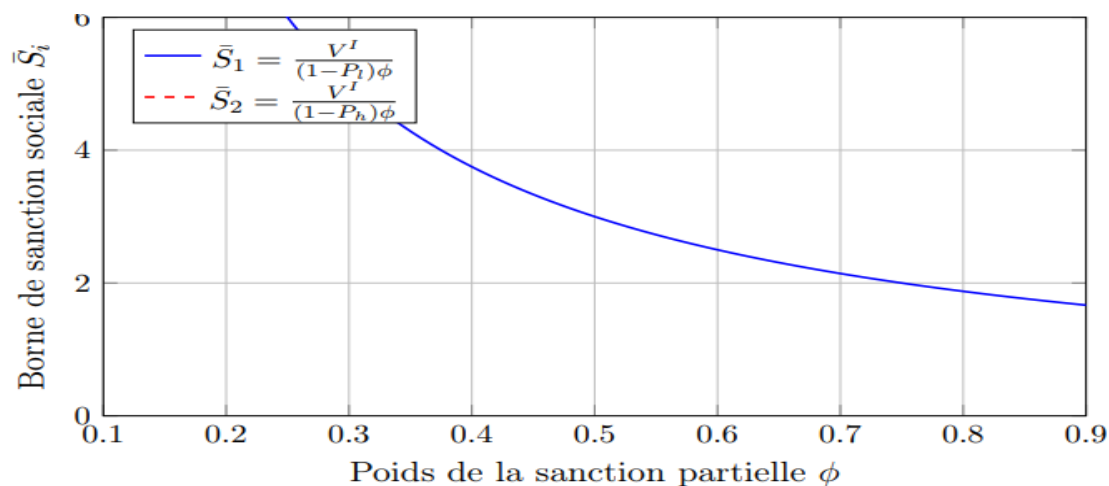


Figure N°3 : Évolution des bornes de sanction en fonction de ϕ (avec $V^I = 1, 2$)

Source : Auteur

Interprétation :

Le graphique confirme que :

- Les deux bornes décroissent de manière hyperbolique lorsque ϕ augmente ;
- La distance entre \bar{S}_1 et \bar{S}_2 est d'autant plus grande que ϕ est faible ;
- Un faible niveau de sanction partielle permet d'atteindre plus facilement un équilibre, car il existe un intervalle plus large dans lequel les emprunteurs prudents acceptent le contrat, et les risqués s'abstiennent.

Cette analyse met en évidence un point essentiel : « la tolérance institutionnelle (ϕ faible) augmente la flexibilité contractuelle ». À l'inverse, une institution trop sévère (avec $\phi \approx 1$) voit l'intervalle se réduire, rendant difficile l'atteinte d'un équilibre efficace.

Conclusion de l'analyse de sensibilité :

La variable ϕ constitue un levier stratégique majeur pour les institutions de microfinance. En ajustant l'intensité de la sanction sociale qu'elles exercent, ces institutions influencent directement l'efficacité et la portée de leurs contrats. Un calibrage modéré de la sanction permet une meilleure sélectivité sans compromettre l'inclusion. Cette observation renforce l'idée selon laquelle la rigueur disciplinaire doit être pensée non en termes absolus, mais en fonction du profil de la clientèle ciblée.

3.3.2. Sensibilité des bornes dans le contrat groupé

Nous étendons ici l'analyse de sensibilité au contrat de prêt groupé. Les bornes d'équilibre \bar{S}_3 et \bar{S}_4 , définies par : $\bar{S}_3 := \frac{V^{GG}}{(1 - P_l)(1 + \phi)S}$, $\bar{S}_4 := \frac{V^{GG}}{(1 - P_h)(1 + \phi)S}$ dépendent également de ϕ , l'intensité de la sanction institutionnelle partielle. L'effet est similaire à celui observé dans le contrat individuel : une baisse de ϕ élargit la zone d'équilibre.

Nous représentons ci-dessous l'évolution des deux bornes pour une valeur fixée de $V^{GG} = 1,4$.

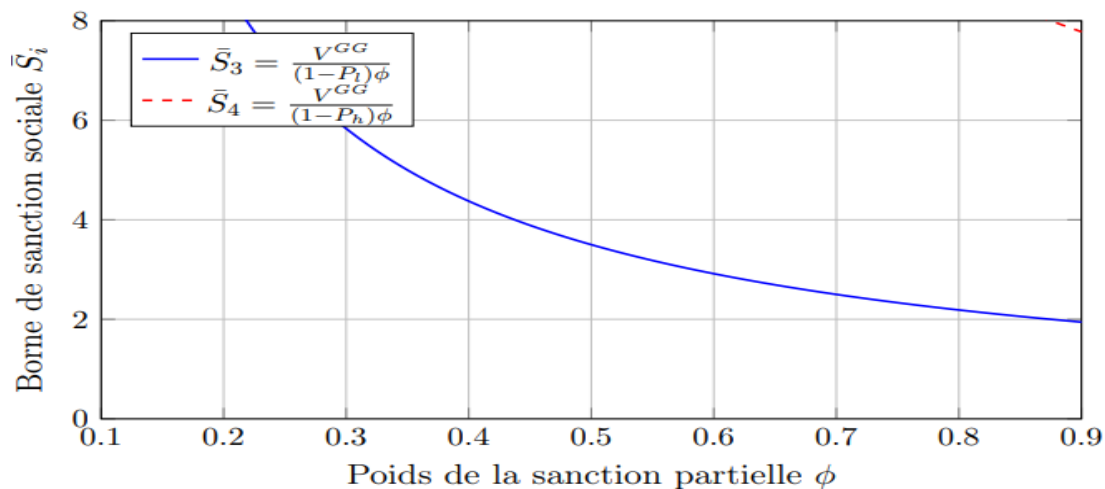


Figure N°4 : Évolution des bornes de sanction dans le contrat groupé (avec $V^{GG} = 1,4$)

Source : Auteur

Commentaire :

La forme hyperbolique des deux courbes illustre que :

- Le resserrement de l'intervalle d'équilibre est plus rapide dans le cas groupé lorsque ϕ augmente.
- Le seuil supérieur \bar{S}_4 croît rapidement pour les faibles valeurs de ϕ , révélant la sensibilité accrue des emprunteurs prudents dans un contexte de sanction collective. Cela renforce l'idée que la sanction sociale doit être d'autant mieux calibrée que le dispositif est solidaire, afin de ne pas fragiliser les comportements coopératifs.

3.3.3. Comparaison synthétique des bornes selon le type de contrat

Pour mieux visualiser les effets contractuels de la sanction sociale, nous proposons une représentation conjointe des bornes \bar{S}_1, \bar{S}_2 (prêt individuel) et \bar{S}_3, \bar{S}_4 (prêt groupé) en fonction du paramètre ϕ . Ce graphique met en évidence les différences structurelles entre les deux dispositifs. D'une part, les bornes associées au contrat groupé sont systématiquement plus élevées, traduisant un revenu espéré plus important dans l'état (G, G) , du fait de la solidarité

entre emprunteurs. D'autre part, la largeur de l'intervalle admissible diminue plus rapidement dans le cas groupé lorsque ϕ augmente, en raison de la double vulnérabilité aux défauts croisés. Cette représentation permet ainsi d'éclairer le compromis entre solidarité contractuelle et fragilité incitative.

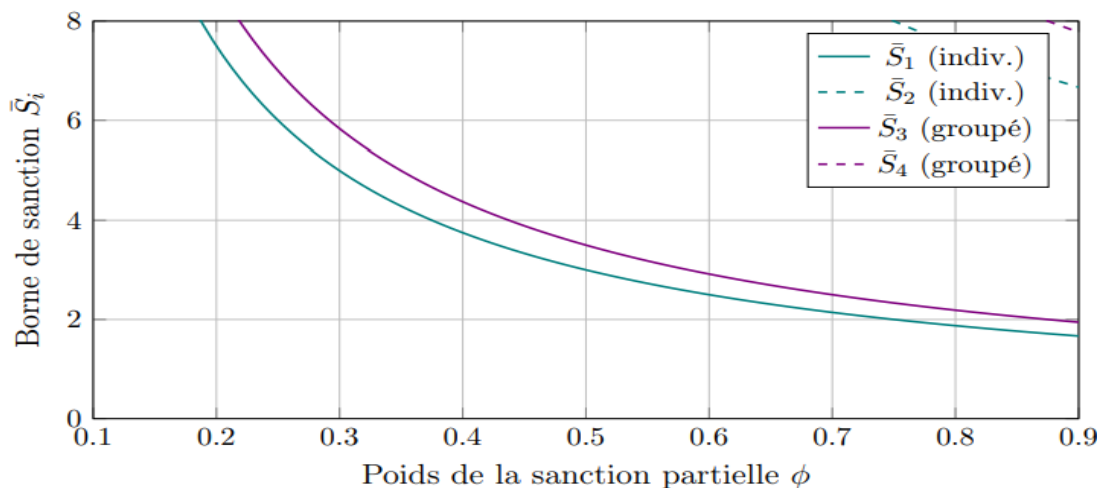


Figure N°5 : Comparaison des bornes de sanction selon le type de contrat

Source : Auteur

Lecture interprétative :

Le graphique comparatif met en relief deux dynamiques essentielles dans la gestion incitative des emprunteurs.

Premièrement, les courbes correspondant au contrat groupé (\bar{S}_3, \bar{S}_4) sont situées au-dessus de celles du contrat individuel (\bar{S}_1, \bar{S}_2) pour tout $\phi \in (0, 1)$. Cette position traduit le fait que le revenu espéré est plus élevé dans un dispositif groupé (état (G, G)), en raison du partage du risque et de la responsabilisation croisée entre les membres. En conséquence, le seuil minimal \bar{S}_3 à partir duquel le contrat devient dissuasif pour les emprunteurs risqués est lui aussi plus élevé que dans le cas individuel. Cela souligne que les sanctions doivent être calibrées à un niveau supérieur lorsque la coopération entre membres renforce la tolérance au risque.

Deuxièmement, la comparaison des courbes indique que l'écart entre les bornes inférieure et supérieure diminue plus rapidement dans le cas groupé lorsque ϕ augmente. Ce resserrement traduit une fragilité incitative spécifique aux contrats solidaires : plus la sanction institutionnelle devient partielle (faible ϕ), plus la tolérance implicite du groupe s'élargit, offrant une marge d'incitation viable. À l'inverse, une sanction trop rigide (forte ϕ) rétrécit cette fenêtre, risquant d'exclure même les emprunteurs prudents.

Ainsi, la double sanction sociale, bien que potentiellement plus puissante, requiert un calibrage plus fin que dans un modèle individuel. La viabilité du contrat groupé dépend étroitement de

l'intensité perçue de la sanction institutionnelle, qui doit être suffisante pour exclure les profils risqués, sans pour autant décourager l'engagement collectif des bons emprunteurs.

4. Discussion générale, limites du modèle et perspectives

L'analyse théorique et numérique menée dans les sections précédentes met en évidence le rôle central des mécanismes de sanction sociale dans la conception de contrats de microcrédit incitatifs. Plus précisément, nous avons montré que l'existence d'un intervalle strictement positif pour le niveau de sanction permet de filtrer efficacement les emprunteurs selon leur profil de risque. Cette approche offre une alternative aux mécanismes traditionnels de garantie financière, souvent inaccessibles aux populations ciblées par le microcrédit.

4.1. Principaux apports

Notre contribution repose sur plusieurs points clés :

- Une modélisation rigoureuse, fondée sur un cadre markovien du comportement d'emprunteur, permettant d'évaluer le revenu actualisé selon les transitions de statut.
- L'introduction d'une double sanction sociale dans le contrat groupé, combinant sanction communautaire et sanction institutionnelle.
- L'identification d'un intervalle optimal de sanction qui maximise l'efficacité contractuelle en excluant les emprunteurs risqués sans décourager les bons profils.
- Une simulation graphique intégrée et une analyse de sensibilité des bornes d'équilibre, fournissant une lecture opérationnelle des résultats.

Ces résultats éclairent des décisions concrètes pour les institutions de microfinance en matière de calibrage des incitations sociales, en particulier dans des environnements à faible capacité de recours judiciaire.

4.2. Limites du modèle

Malgré sa portée analytique, notre modèle repose sur plusieurs hypothèses restrictives qu'il convient de nuancer :

- La dichotomie entre emprunteurs « prudents » et « risqués » est stylisée : dans la réalité, les niveaux de risque sont continus et souvent ambigus.
- Le paramètre de sanction sociale est supposé exogène et uniforme, alors qu'il dépend dans les faits des normes locales, du capital social et de la dynamique collective.
- Le modèle est statique ou stationnaire : il ne prend pas en compte l'apprentissage, la réputation dynamique ni les effets cumulatifs du comportement antérieur.
- Enfin, nous ne tenons pas compte des effets de réseau entre emprunteurs, qui peuvent influencer le niveau de sanction ou de soutien mutuel.

Ces limites n'invalident pas l'approche mais appellent à des raffinements futurs.

4.3. Pistes de recherche futures

Plusieurs prolongements sont envisageables pour enrichir le cadre actuel :

- Étendre le modèle à un continuum de types d'emprunteurs, avec des distributions de risque.
- Intégrer une dynamique de réputation ou d'apprentissage, modifiant les probabilités de transition dans la chaîne de Markov.
- Introduire des effets endogènes du groupe : par exemple, un niveau de sanction S qui dépend de l'historique collectif ou du capital social local.
- Évaluer empiriquement les seuils de sanction observés sur le terrain, en confrontant les bornes théoriques aux pratiques des IMF (institutions de microfinance).

Ces développements permettraient de rendre le modèle plus prédictif et plus proche des contextes réels d'intervention.

4.4. Distribution continue du risque

Motivation. Notre modélisation binaire (types « prudent » vs « risqué ») est utile pour l'exposition, mais elle ne reflète que partiellement la diversité réelle des emprunteurs. Nous proposons ici une généralisation où la probabilité de succès $\alpha \in (0, 1)$ est continue.

Hypothèse (distribution des types). Nous supposons que $\alpha \sim \text{Beta}(a, b)$ avec densité

$$f(\alpha; a, b) = \frac{\alpha^{a-1}(1-\alpha)^{b-1}}{B(a, b)}, \quad a > 0, b > 0, \quad \text{où } B(a, b) \text{ est la fonction Bêta.}$$

Cette loi flexible permet de représenter des populations concentrées vers des comportements prudents ($a > b$), risqués ($a < b$), ou équilibrés ($a \approx b$).

Règle de participation. Notons $V(\alpha)$ le revenu actualisé attendu sous le contrat, pour un emprunteur de type α . La sanction sociale entre dans la condition de participation via une pénalité attendue proportionnelle au risque de défaut $(1 - \alpha)$ et à un facteur contractuel κ :

$$CP(\alpha; S) : V(\alpha) - \kappa S(1 - \alpha) > 0.$$

Le facteur κ dépend du dispositif :

$$k = \begin{cases} \varphi & \text{(prêt individuel, sanction partielle)} \\ 1 + \varphi & \text{(prêt groupé, double sanction)} \end{cases}, \quad \text{avec } \varphi \in (0, 1].$$

Ensemble d'admission et part de marché. Pour un niveau de sanction $S > 0$, l'ensemble des types qui participent est

$$A(S) = \{\alpha \in (0, 1) : V(\alpha) > \kappa S(1 - \alpha)\}.$$

La part de marché (taux d'adhésion) induite par S est alors

$$p(S) = \int_{A(S)} f(\alpha; a, b) d\alpha .$$

Seuil de type et expression fermée (approximation affine). Dans de nombreux modèles markoviens, $V(\alpha)$ est croissante en α . À des fins opérationnelles, on peut l'approximer par une forme affine locale $V(\alpha) \approx A + B\alpha$ (avec $B > 0$). La condition CP devient

$$A + B\alpha > \kappa S(1 - \alpha) \Leftrightarrow \alpha > \alpha^*(S) := \frac{\kappa S - A}{B + \kappa S} .$$

Ainsi, l'ensemble admis est $A(S) = (\alpha^*(S), 1) \cap (0, 1)$, et la part de marché vaut

$$p(S) = \int_{\alpha^*(S)}^1 \frac{\alpha^{a-1}(1-\alpha)^{b-1}}{B(a,b)} d\alpha = 1 - I_{\alpha^*(S)}(a, b),$$

où $I_x(a, b)$ est la fonction Bêta incomplète régularisée. Nous retrouvons ainsi une fonction de filtrage $S \rightarrow p(S)$ dépendant à la fois du calibrage de la sanction (κS) et de la structure de risque dans la population (a, b) .

Recettes et viabilité agrégées. Le revenu moyen par emprunteur admis s'écrit

$$\bar{V}(S) = \frac{1}{p(S)} \int_{\alpha^*(S)}^1 V(\alpha) f(\alpha; a, b) d\alpha , \text{ et le revenu institutionnel par demandeur vaut}$$

$$R(S) = p(S) \bar{V}(S).$$

La viabilité incitative (exclusion endogène des types risqués) correspond aux niveaux de S pour lesquels $\alpha^*(S)$ est suffisamment élevé pour écarter la masse des faibles α , tout en gardant $p(S)$ non négligeant.

Comparaison individuel vs groupé. À S donné, le contrat groupé remplace $\kappa = \varphi$ par $\kappa = 1 + \varphi$, ce qui augmente $\alpha^*(S)$ et réduit $p(S)$. Il en découle une fenêtre d'équilibre potentiellement plus étroite pour le groupé, nécessitant un calibrage plus fin de S pour ne pas exclure des types α élevés.

Remarque 4.1 (Interprétation empirique). Les paramètres (a, b) peuvent être estimés par des données de terrain (historique de défauts, scores ou proxys de qualité de projet). La formule de $p(S)$ fournit alors un outil de calibrage de la sanction : fixer S pour atteindre un taux d'adhésion cible tout en filtrant les faibles α .

Remarque 4.2 (Au-delà de l'approximation affine). Lorsque $V(\alpha)$ est disponible analytiquement (par exemple sous forme fractionnaire issue d'un système linéaire stationnaire), nous définissons directement $\alpha^*(S)$ comme la plus petite solution de $V(\alpha) = \kappa S(1 - \alpha)$ et nous calculons $p(S) = \int_{\alpha^*(S)}^1 f(\alpha; a, b) d\alpha$.

Proposition 4.1 (Monotonie du seuil de type admissible). Soit $\alpha^*(S) := \frac{\kappa S - A}{B + \kappa S}$ le seuil minimal de probabilité de succès garantissant la participation au contrat, avec $B > 0$ et $\kappa > 0$. Alors :

1. La fonction $S \rightarrow \alpha^*(S)$ est strictement croissante sur $(0, +\infty)$.
2. Pour tout niveau de sanction $S > 0$, le seuil est plus élevé en prêt groupé qu'en prêt individuel : $\alpha^*_{\text{groupé}}(S) > \alpha^*_{\text{individuel}}(S)$, puisque $\kappa_{\text{groupé}} = 1 + \varphi > \varphi = \kappa_{\text{individuel}}$.

Esquisse de preuve.

1. Nous avons $\alpha^*(S) := \frac{\kappa S - A}{B + \kappa S}$. Sa dérivée par rapport à S est $\frac{d}{dS} \alpha^*(S) := \frac{\kappa(B+A)}{(B + \kappa S)^2}$.

Comme $B > 0$ et $\kappa > 0$, cette dérivée est strictement positive. D'où la croissance stricte de $\alpha^*(S)$.

2. En comparant deux contrats avec le même S mais des valeurs de κ différentes, nous constatons que plus κ est grand, plus $\alpha^*(S)$ est élevé. Or, dans le cas du contrat groupé, $\kappa = 1 + \varphi$ est toujours supérieur à $\kappa = \varphi$. Donc le seuil d'admission est plus strict en groupé, ce qui réduit la part des types admis.

Remarque 4.3. Cette proposition formalise l'intuition suivante : une hausse de la sanction sociale S accroît mécaniquement le seuil minimal $\alpha^*(S)$, écartant davantage d'emprunteurs. De plus, pour un même niveau de S , le contrat groupé (double sanction) impose une exigence plus forte que le contrat individuel, réduisant ainsi la fenêtre d'équilibre mais augmentant la discipline collective.

4.5. Réputation dynamique et apprentissage

Idee générale. Chaque emprunteur a une probabilité de succès latente $\alpha \in (0, 1)$. L'institution ne l'observe pas mais met à jour une croyance $\alpha | F_t \sim \text{Beta}(a_t, b_t)$, où F_t est l'historique des remboursements jusqu'à la date t . Nous posons la moyenne a posteriori (score de réputation continu)

$$m_t := E[\alpha | F_t] = \frac{a_t}{a_t + b_t}, \quad v_t := \text{Var}[\alpha | F_t] = \frac{a_t b_t}{(a_t + b_t)^2 (a_t + b_t + 1)}$$

Apprentissage (conjugaison Beta–Bernoulli). À chaque période t , nous observons $Y_t \in \{0, 1\}$ (succès = 1, défaut = 0). La mise à jour est $a_{t+1} = a_t + Y_t$, $b_{t+1} = b_t + (1 - Y_t)$, d'où $m_{t+1} = \frac{a_t + Y_t}{a_t + b_t + 1} = \frac{a_t}{n_{t+1}} + \frac{Y_t}{n_{t+1}}$, $n_t := a_t + b_t$. La probabilité prédictive de défaut est $P(Y_{t+1} = 0 | F_t) = 1 - m_t$.

État de réputation discret (projection du score). Nous discrétisons le score continu m_t en un état de réputation $R_t \in \{\text{Faible}, \text{Moyenne}, \text{Élevée}\}$ via deux seuils $0 < \tau_1 < \tau_2 < 1$:

$$R_t = \begin{cases} \text{Faible si } m_t < \tau_1, \\ \text{Moyen si } \tau_1 \leq m_t < \tau_2, \\ \text{Élevé si } m_t \geq \tau_2. \end{cases}$$

Nous autorisons des règles contractuelles dépendantes de la réputation :

$\kappa(R_t) \in \{\varphi, 1 + \varphi\}$, $S_t = S_0(1 + \lambda 1_{\{R_t=\text{Faible}\}} - \mu 1_{\{R_t=\text{Élevée}\}})$, $\gamma_t = \gamma_0 + \eta(m_t - \bar{m})$, où κ pondère la sanction attendue, S_t est l'intensité de sanction institutionnelle, γ_t la probabilité de réintégration (plus élevée pour les bonnes réputations).

Règle de participation dynamique. La condition de participation anticipée au temps t devient, avec la probabilité prédictive,

$$CP_t : V_t(m_t) - \kappa(R_t) S_t(1 - m_t) > 0,$$

où $V_t(m_t)$ est le revenu actualisé espéré sous la croyance courante (croissant en m_t).

Proposition 4.2 (Propriétés d'apprentissage et effet incitatif de la réputation). Sous la mise à jour Beta–Bernoulli ci-dessus, nous avons :

1. (Martingale du score) $E[m_{t+1} | F_t] = m_t$ et $Var(m_{t+1} | F_t) = \frac{m_t(1-m_t)}{(n_t+1)^2}$.
2. (Concentration) $E[v_{t+1} | F_t] < v_t$: l'incertitude sur α décroît avec t .
3. (Seuil de type et réputation) si $V_t(m)$ est croissante en m et localement affine $V_t(m) \approx A_t + B_t m$ avec $B_t > 0$, alors le seuil de participation $m \rightarrow m_t^*$ défini par $A_t + B_t m = \kappa(R_t) S_t(1 - m) \iff m_t^* = \frac{\kappa(R_t) S_t - A_t}{B_t + \kappa(R_t) S_t}$ est (i) croissant en S_t et en $\kappa(R_t)$, (ii) décroissant en A_t et B_t .
4. (Discipline vs inclusion) Pour un même S_t , remplacer $\kappa = \varphi$ (individuel) par $\kappa = 1 + \varphi$ (groupé) augmente m_t^* et réduit la part admise $p_t = P(m_t > m_t^*)$, donc renforce la discipline mais rétrécit la fenêtre d'équilibre.

Esquisse de preuve.

- (1) Par conjugaison Beta–Bernoulli, la prédictive de Y_t est $Bernoulli(m_t)$, d'où $E[m_{t+1} | F_t] = m_t$. La variance conditionnelle se calcule directement via la mise à jour de a, b .
- (2) Résulte de la formule fermée de v_t et de $n_{t+1} = n_t + 1$.
- (3) Le seuil découle de l'égalité CP avec la forme affine ; les monotonicités s'obtiennent par dérivation de m_t^* en S_t, κ, A_t, B_t .
- (4) Immédiat puisque $1 + \varphi > \varphi \Rightarrow \frac{\partial m_t^*}{\partial \kappa} > 0$.

Implémentation opérationnelle. L'institution n'a qu'à maintenir (a_t, b_t) . À chaque période :

- (i) mettre à jour (a_{t+1}, b_{t+1}) , (ii) calculer m_{t+1} , (iii) projeter m_{t+1} en R_{t+1} , (iv) appliquer

$(S_{t+1}, \gamma_{t+1}, \kappa(R_{t+1}))$, (v) évaluer la *CP* dynamique. Cette boucle introduit une réputation endogène qui module la sanction et la réintégration.

Remarque 4.4 (Comparatif statique vs dynamique). Dans le modèle statique, les bornes de sanction \bar{S}_i sont calibrées pour deux types. Ici, l'apprentissage fait évoluer la distribution des types perçus via m_t , ce qui transforme les bornes en règles dynamiques $t \rightarrow m_t^*(S_t)$ et permet un calibrage adaptatif (tolérance accrue pour les bons historiques, sévérité ciblée sinon).

4.6. Politique optimale de sanction dynamique

Nous cherchons à choisir la trajectoire de sanction $(S_t)_{t \geq 0}$ (et éventuellement $\kappa(R_t)$) pour maximiser un critère institutionnel sous contrainte d'inclusion minimale.

Problème. Pour une période donnée t (contrôle myope) : $\max_{S_t \in [S_{min}, S_{max}]} R_t(S_t) = p_t(S_t) \bar{V}_t(S_t)$ s.c. $p_t(S_t) \geq p_{min}$,

$$\text{où } p_t(S_t) = \mathbb{P}(m_t > m_t^*(S_t)) \text{ et } m_t^*(S_t) = \frac{\kappa(R_t)S_t - A_t}{B_t + \kappa(R_t)S_t}.$$

Sous l'approximation affine $V_t(m) \approx A_t + B_t m$ (avec $B_t > 0$), nous avons $p_t(S_t) = 1 - I_{\alpha^*}(S_t)$ (a_t, b_t) avec $\alpha^* \equiv m_t^*$.

FOC/KKT (cas intérieur). Si la contrainte d'inclusion n'est pas active au point optimal et que R_t est quasi-concave, un optimum intérieur S_t^* satisfait

$$\frac{dR_t}{dS_t}(S_t^*) = \frac{dp_t}{dS_t} \bar{V}_t + p_t \frac{d\bar{V}_t}{dS_t} = 0.$$

$$\text{Or } \frac{dp_t}{dS_t} = -f_m(m_t^*) \frac{dm_t^*}{dS_t}, \text{ avec } \frac{dm_t^*}{dS_t} = \frac{\kappa(R_t)(B_t + A_t)}{(B_t + \kappa(R_t)S_t)^2} > 0.$$

Donc l'augmentation de S_t réduit p_t (effet discipline) et peut augmenter ou diminuer \bar{V}_t selon la sensibilité de V_t aux types marginaux.

Règle pratique (contrainte active). Dans les applications, la contrainte $p_t(S_t) \geq p_{min}$ est souvent active : $S_t^* = \inf\{S \in [S_{min}, S_{max}] : p_t(S) \leq p_{min}\}$. Autrement dit, nous poussons la sanction jusqu'à atteindre le taux d'adhésion cible p_{min} , ce qui assure la viabilité tout en contrôlant l'exclusion.

Proposition 4.3 (Existence et structure de la solution). Supposons (i) $p_t(S)$ continue, strictement décroissante sur $[S_{min}, S_{max}]$, (ii) $\bar{V}_t(S)$ continue et faiblement unimodale. Alors il existe au moins une solution $S_t^* \in [S_{min}, S_{max}]$. De plus, si la contrainte d'inclusion est active, S_t^* est le plus petit S tel que $p_t(S) = p_{min}$ (règle de seuil). **Esquisse.** L'existence découle de la compacité et de la continuité. La décroissance stricte de p_t garantit l'unicité de la solution à $p_t(S) = p_{min}$ lorsqu'elle est atteignable. La règle de seuil suit des conditions KKT avec multiplicateur associé à la contrainte d'inclusion.

Algorithme opérationnel (myope).

1. Estimer $(a_t, b_t) \Rightarrow$ calculer la densité/postérieure sur m_t .
2. Calculer $m_t^*(S)$ pour S sur une grille et en déduire $p_t(S) = 1 - I_{m_t^*}(S)(a_t, b_t)$.
3. Si $\max_S p_t(S) < p_{min}$: relâcher p_{min} ou élargir $[S_{min}, S_{max}]$.
4. Sinon, poser $S_t^* = \min\{S : p_t(S) \leq p_{min}\}$ (solution à la contrainte active).
5. Mettre en œuvre S_t^* , observer Y_t , mettre à jour (a_{t+1}, b_{t+1}) , recalculer au temps $t + 1$.

Remarque 4.5 (Contrôle dynamique). Dans un cadre multi-périodes, nous pouvons maximiser $\sum_{t \geq 0} \delta^t R_t(S_t)$ avec une loi de mouvement pour (a_t, b_t) . La règle de seuil myope sert alors de politique heuristique, proche de l'optimum lorsque l'apprentissage est rapide et les chocs modérés.

4.7. Scénarios opérationnels de mise en œuvre

Au-delà de la formalisation mathématique, l'application concrète d'un contrat à double sanction requiert une déclinaison en scénarios opérationnels. Nous proposons ci-dessous trois configurations illustratives qui traduisent les résultats du modèle en mécanismes applicables par les institutions de microfinance (IMF).

Scénario 1 : Contrat probatoire avec sanction communautaire renforcée. Un nouvel emprunteur débute par un prêt probatoire de faible montant. En cas de défaut, une sanction sociale est activée via un comité de village (exclusion temporaire des tontines, réputation entachée). Cette phase repose sur la pression informelle pour discipliner le comportement initial, tandis que la sanction institutionnelle reste limitée. Le modèle montre que cette configuration réduit le risque moral en phase d'entrée tout en maintenant un taux d'adhésion élevé.

Scénario 2 : Fidélisation par taux préférentiel et sanction croisée. Après réussite de la phase probatoire, l'emprunteur accède à des prêts plus importants à un taux préférentiel. En cas de défaut, il subit non seulement une sanction institutionnelle (perte du taux réduit, exclusion temporaire) mais également une sanction croisée vis-à-vis de ses pairs (solidarité financière imposée, perte de réputation collective). Ce mécanisme reflète le cœur du contrat à double sanction : discipline individuelle + pression du groupe. Notre analyse stationnaire indique que cette combinaison élargit l'intervalle de viabilité des contrats tout en filtrant les profils risqués.

Scénario 3 : Réintégration conditionnelle fondée sur la réputation. Un emprunteur exclu peut réintégrer le programme après une période d'exclusion graduelle, à condition de reconstruire sa réputation au sein du groupe (participation régulière aux réunions, constitution d'une épargne collective). Ce scénario opérationnalise l'extension dynamique discutée plus

haut : le retour en inclusion n'est pas automatique mais dépend d'un score de réputation observable. Cela permet d'articuler la sanction institutionnelle avec l'apprentissage progressif de la discipline de crédit.

Synthèse. Ces scénarios montrent que le contrat à double sanction peut être adapté selon le cycle de vie de l'emprunteur : probatoire (scénario 1), fidélisation (scénario 2), et réintégration (scénario 3). Ils fournissent aux IMF un cadre d'action gradué où la pression sociale et institutionnelle s'ajuste de manière complémentaire, en cohérence avec les résultats théoriques du modèle.

Conclusion

Cet article a proposé une modélisation markovienne originale du contrat de microcrédit à double sanction sociale, intégrant à la fois une pénalité institutionnelle (exclusion graduelle) et une sanction communautaire (pression sociale et réputation). L'analyse stationnaire des revenus et des probabilités de transitions a permis de mettre en évidence les conditions de viabilité de tels contrats, en montrant comment l'articulation des deux types de sanction contribue à discipliner les comportements opportunistes tout en maintenant un équilibre entre inclusion et pérennité financière.

Les prolongements proposés dans la discussion enrichissent la portée du modèle. D'une part, l'introduction de distributions continues de risque (via une loi bêta par exemple) permet de dépasser la dichotomie prudent/risqué et de refléter plus fidèlement l'hétérogénéité des emprunteurs. D'autre part, l'intégration d'une dynamique de réputation et d'apprentissage rend compte du processus par lequel les institutions ajustent leurs décisions en fonction de l'historique de remboursement, transformant ainsi le contrat en un mécanisme évolutif plutôt que statique. Enfin, la formulation d'une politique optimale de sanction, assortie de contraintes d'inclusion, offre une règle pratique pour calibrer la sévérité disciplinaire en fonction d'objectifs institutionnels.

Sur le plan opérationnel, trois scénarios d'application ont été proposés : une phase probatoire marquée par la sanction sociale, une phase de fidélisation associant taux préférentiel et sanction croisée, et un mécanisme de réintégration conditionné à la réputation. Ces déclinaisons concrètes traduisent les résultats théoriques en dispositifs adaptables au cycle de vie de l'emprunteur, fournissant aux institutions de microfinance un cadre gradué pour mettre en œuvre le contrat à double sanction.

En somme, l'approche présentée concilie rigueur analytique et pertinence pratique. Elle met en évidence la capacité des contrats à double sanction à améliorer la discipline de crédit tout en

préservant l'inclusion. Les perspectives ouvertes par ce travail concernent l'exploration empirique des paramètres du modèle, l'évaluation comparative entre contextes institutionnels et la simulation de politiques optimales à long terme. Ces pistes constituent autant de jalons pour relier la modélisation théorique aux défis concrets de la microfinance contemporaine.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Andriamanantena P., Abdou I., Ravelomanana M., Rakotozafy R.(2023). Modèle markovien de prêt groupé en microfinance, <https://hal.science/hal-04177855>
- [2] Andriamanantena P., Abdou I., Ravelomanana M., Rakotozafy R.(2019). Modèle markovien d'octroi de crédit en microfinance, <https://hal.science/hal-01324501>
- [3] David Alary. Prêt de groupe et sanction sociale, [basepub.dauphine.fr> handle](http://basepub.dauphine.fr/handle)
- [4] Al-Azzam, M., Hill, R. C., & Sarangi, S. (2012). Repayment performance in group lending : Evidence from Jordan. *Journal of Development Economics*, 97(2), 404–414.
- [5] Armendáriz, B., & Morduch, J. (2010). *The Economics of Microfinance* (2nd ed.). MIT Press.
- [6] Besley, T., & Coate, S. (1995). Group lending, repayment incentives and social collateral. *Journal of Development Economics*, 46(1), 1–18.
- [7] Conning, J. (2001). Mixing and matching lenders : On the design of credit contracts with adverse selection. *Economics of Transition*, 9(2), 275–305.
- [8] Feigenberg, B., Field, E., & Pande, R. (2013). The economic returns to social interaction : Experimental evidence from microfinance. *Review of Economic Studies*, 80(4), 1459–1483.
- [9] Ghatak, M., & Guinnane, T. W. (1999). The economics of lending with joint liability : Theory and practice. *Journal of Development Economics*, 60(1), 195–228.
- [10] Karlan, D. (2005). Using experimental economics to measure social capital and predict financial decisions. *American Economic Review*, 95(5), 1688–1699.
- [11] Morduch, J. (1999). The microfinance promise. *Journal of Economic Literature*, 37(4), 1569– 1614. [12] Stiglitz, J. E. (1990). Peer monitoring and credit markets. *World Bank Economic Review*, 4(3), 351–366.
- [13] Wydick, B. (1999). Can social cohesion be harnessed to repair market failures ? Evidence from group lending in Guatemala. *Economic Journal*, 109(457), 463–475.
- [14] Deaton, A. (1997). *The Analysis of Household Surveys : A Microeconometric Approach to Development Policy*. Johns Hopkins University Press. [Utilisé pour la modélisation hétérogène du risque]

[15] Banerjee, A. V., & Newman, A. F. (1993). Occupational choice and the process of development. *Journal of Political Economy*, 101(2), 274–298. [Réputation, apprentissage et choix dynamique]

[16] Fudenberg, D., & Levine, D. (1998). *The Theory of Learning in Games*. MIT Press. [Réputation dynamique et apprentissage]

[17] Phelan, C. (2006). Public trust and government betrayal. *Journal of Economic Theory*, 130(1), 27–43. [Modèles de réputation]