

**Contrat progressif en microfinance solidaire : une modélisation
markovienne du revenu actualisé avec exclusion réversible.
Progressive contract in solidarity microfinance: Markov modeling of
discounted income with reversible exclusion**

ANDRIAMANANTENA Philibert

Doctorant

Ecole Doctorale Modélisation Informatique de l'Université de Fianarantsoa-Madagascar
Laboratoire de Mathématique et Application de l'Université de Fianarantsoa

ABDOU Issouf

Enseignant Chercheur

Université des Comores

Dynamique Economique et Juridique des secteurs Informels et Formels

DIENER Francine

Professeur titulaire

Université de Nice France

RAVELOMANANA Mamy Raoul

Professeur titulaire, agrégé des Universités en sciences économiques

Université d'Antananarivo

Centre de Recherches Economiques pour le Développement

DHIB Nahla

Maître de conférences

Université Côte-d'Azur France

RAKOTOZAFY Rivo

Maître de conférences

Université de Fianarantsoa

Laboratoire de Mathématique et Application de l'Université de Fianarantsoa

Date de soumission : 01/08/2025

Date d'acceptation : 05/10/2025

Pour citer cet article :

ANDRIAMANANTENA. P. & Al. (2025) « Contrat progressif en microfinance solidaire : une modélisation markovienne du revenu actualisé avec exclusion réversible », Revue Française d'Économie et de Gestion « Volume 6 : Numéro 10 » pp : 691- 710.

Author(s) agree that this article remain permanently open access under the terms of the Creative Commons

Attribution License 4.0 International License



Résumé

Cet article propose une modélisation probabiliste du prêt solidaire en microfinance à l'aide d'une chaîne de Markov à temps discret. Le contrat étudié repose sur une dynamique progressive intégrant une phase probatoire, une inclusion durable et une exclusion réversible. À partir d'une fonction de flux de revenu associée aux transitions, nous définissons un revenu actualisé moyen permettant d'évaluer la viabilité économique de l'institution. L'existence d'un régime stationnaire est démontrée et exploitée pour formuler un problème d'optimisation dynamique des paramètres contractuels. Des simulations numériques et une généralisation multi-agents permettent enfin de comparer l'efficacité du prêt solidaire à celle du prêt individuel. Ce cadre analytique offre des outils d'aide à la décision pour concevoir des contrats conciliant viabilité financière et inclusion sociale.

Mots clés : microfinance ; chaînes de Markov ; prêt solidaire ; revenu actualisé ; incitations contractuelles.

Abstract

This paper develops a probabilistic model of group lending in microfinance using a discrete-time Markov chain. The proposed contract relies on a progressive dynamic including a probationary phase, long-term inclusion, and reversible exclusion. By assigning a revenue flow to each transition, we define an average discounted income to evaluate the institution's economic viability. The existence of a stationary regime is demonstrated and used to formulate a dynamic optimization problem for contract parameters. Numerical simulations and a multi-agent extension are conducted to compare the efficiency of group lending with that of individual lending. This analytical framework provides decision-making tools for designing contracts that reconcile financial sustainability with social inclusion.

Keywords : microfinance ; Markov chains ; group lending ; discounted revenue ; contractual incentives.

Introduction

Depuis plusieurs décennies, la microfinance s'impose comme un instrument essentiel pour favoriser l'accès des populations vulnérables au crédit, en particulier dans les pays en développement. En s'appuyant sur des mécanismes innovants, elle permet de dépasser certains obstacles structurels du financement bancaire traditionnel, notamment l'absence de garanties matérielles et les asymétries d'information. Le prêt solidaire, ou group lending, constitue l'un des dispositifs les plus emblématiques de cette approche. Basé sur la responsabilité conjointe des emprunteurs, il s'appuie sur la connaissance mutuelle et la pression sociale pour discipliner le remboursement et renforcer l'inclusion financière.

Cependant, la mise en œuvre effective de tels contrats soulève plusieurs interrogations : quelle forme donner à l'incitation collective ? Comment calibrer les sanctions afin d'éviter les effets d'exclusion définitive ? Quel est l'impact réel de la solidarité sur la performance des institutions de microfinance et sur la trajectoire d'inclusion des emprunteurs ? Ces interrogations débouchent sur la problématique centrale de cette recherche : dans quelle mesure un contrat solidaire progressif et réversible permet-il de concilier viabilité économique et inclusion sociale en microfinance ? Pour répondre à cette question, nous proposons une modélisation probabiliste fondée sur les chaînes de Markov à temps discret. Cette approche permet de représenter dynamiquement les différents états contractuels d'un emprunteur (probation, progression, inclusion, exclusion temporaire) et les transitions entre ces états. Nous associons à chaque transition une fonction de flux de revenu, de manière à évaluer la rentabilité stationnaire du dispositif. Enfin, des simulations numériques et un problème d'optimisation dynamique sont mobilisés afin d'identifier les paramètres contractuels garantissant la viabilité économique tout en respectant un seuil minimal d'inclusion sociale.

L'article s'organise de la manière suivante. La première section présente une revue de la littérature sur le prêt solidaire, en mettant en évidence les apports et limites des modèles existants. La deuxième section introduit la modélisation markovienne du contrat solidaire progressif avec exclusion réversible. La troisième section développe la théorie des chaînes de Markov avec revenu, appliquée à notre cadre. La quatrième section illustre les résultats par des simulations numériques. La cinquième section formalise un problème d'optimisation dynamique et discute des stratégies de calibration. La sixième section généralise le modèle au cas multi-agents, afin d'analyser l'effet de la taille des groupes. La septième section compare notre dispositif au prêt individuel classique. Enfin, la conclusion met en évidence les apports, limites et perspectives de la recherche.

1. Revue de la littérature

Le prêt solidaire, également désigné sous l'appellation de prêt de groupe, occupe une place centrale dans la littérature en économie du développement et en finance inclusive. En mobilisant la responsabilité conjointe des membres, ce dispositif contractuel vise à pallier les imperfections des marchés de crédit classiques, notamment les problèmes d'asymétrie d'information et de risque moral. Les contributions fondatrices de Stiglitz (1990), Besley et Coate (1995), Ghatak (1999, 2000) et Armendáriz & Morduch (2000) ont mis en évidence que la constitution volontaire de groupes favorise une sélection sociale endogène. La connaissance mutuelle entre emprunteurs permet en effet de limiter les risques d'adverse selection et d'aléa moral. Toutefois, cette efficacité dépend du degré d'information locale et du capital social mobilisé (Ghatak & Guinnane, 1999).

Sur le plan des incitations, plusieurs travaux (notamment Besley & Coate, 1995) ont souligné l'importance de la surveillance mutuelle et des sanctions informelles dans la discipline de remboursement. Ces mécanismes renforcent la viabilité des contrats solidaires, mais peuvent aussi générer des pressions sociales excessives lorsqu'ils sont appliqués sans phase transitoire. À partir des années 2000, une seconde vague de recherches a introduit des modèles dynamiques, recourant notamment aux chaînes de Markov, pour représenter la trajectoire des emprunteurs. Des contributions comme Khodr & Diener (2008) ou Dhib et al. (2016) ont montré que la modélisation stochastique permet de décrire les transitions entre inclusion, exclusion et réintégration. L'approche des chaînes de Markov avec revenu (CMR) a ensuite ouvert la voie à l'analyse de la viabilité économique des dispositifs contractuels (Djaffar Lessy et al., 2021). Parallèlement, des études empiriques récentes ont mis en évidence l'impact hétérogène des prêts solidaires selon les contextes. Banerjee et al. (2015), à travers une expérimentation aléatoire en Inde, ont montré que la microfinance n'a pas systématiquement les effets attendus sur le revenu des ménages, mais peut renforcer leur résilience financière. Morduch (2019) insiste quant à lui sur la nécessité d'adapter les mécanismes aux spécificités locales. Dans le contexte africain, plusieurs enquêtes de terrain (par exemple, Bangoura, 2010 ; Hulme & Mosley, 1996) soulignent l'importance des réseaux sociaux et des normes communautaires dans la réussite des dispositifs solidaires.

Notre contribution s'inscrit dans cette continuité en proposant une extension théorique originale. Elle introduit explicitement une phase probatoire et une exclusion réversible, absentes des modèles classiques. Ce cadre markovien permet non seulement de formaliser les incitations

intertemporelles, mais aussi d'ouvrir la voie à des applications empiriques futures sur données africaines ou asiatiques, afin de tester la robustesse du modèle proposé.

2. Méthodologie

2.1. Modélisation du prêt solidaire à deux membres

2.1.1. Spécification du contrat

Dans une optique d'inclusion financière encadrée, nous considérons un contrat de prêt solidaire impliquant deux emprunteurs liés par un engagement de responsabilité conjointe. Ce contrat, noté $C(r, \theta, T)$, est défini par les paramètres suivants :

- $r > 0$: taux d'intérêt appliqué à chaque emprunteur en situation de remboursement individuel ;
- $\theta \in [0, 1]$: intensité de la solidarité, traduisant la part du remboursement transférable en cas de défaillance du partenaire ;
- $T \in \mathbb{N}^*$: durée d'exclusion temporaire appliquée après un défaut.

Le contrat est acceptable pour un emprunteur rationnel disposant d'un revenu net $w > 0$ en cas de réussite de son projet, si la condition de participation suivante est satisfaite :

$w \geq 1 + r + q$, où $q = \theta(1 + r)$, le terme q représentant la charge de solidarité potentielle à supporter si le partenaire échoue.

2.1.2. Structure de l'espace d'états et transitions

Le comportement des emprunteurs est modélisé par une chaîne de Markov homogène à temps discret $(X_t)_{t \geq 0}$ prenant ses valeurs dans un espace d'états fini S , défini comme suit : $S = \{D, B_0, B_1, B_2, I, E^T, \dots, E^1\}$, où chaque état contractuel a une signification précise :

- D : demande de crédit (état initial) ;
- B_0 : phase probatoire — premier prêt octroyé sans responsabilité mutuelle ;
- B_1 : progression — groupe stable de deux emprunteurs ayant réussi ;
- B_2 : recomposition — un emprunteur fiable intègre un nouveau groupe ;
- I : inclusion durable — crédit avec taux réduit $r < \bar{r}$ accordé aux emprunteurs fidèles ;
- E^k : exclusion temporaire à la période k , avec retour possible vers D après T étapes. Le processus de transition dépend de deux probabilités :
- γ : probabilité d'acceptation d'une demande de crédit ;
- α : probabilité de succès d'un projet individuel (identique pour les deux partenaires).

2.1.3. Graphe de transition

Le graphe suivant représente les transitions probabilistes entre états, en partant de l'état initial D . Les flèches sont annotées par les probabilités associées, en fonction des résultats des projets individuels (succès ou échec) :

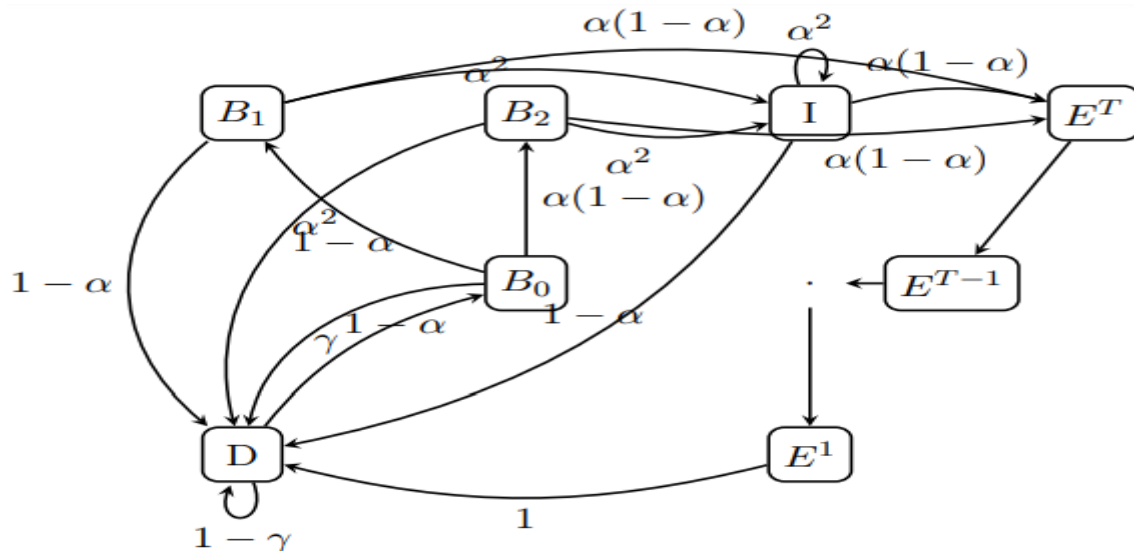


Figure N°1 : Graphe de transition du modèle de prêt solidaire

Source : Auteur

2.1.4. Fonction de flux de revenu

Pour chaque transition $(x, y) \in S \times S$, nous associons un flux monétaire $f(x, y)$ représentant le revenu net pour l'institution. Cette fonction est définie comme suit :

$$f(x, y) = \begin{cases} w - (1 + r) & \text{si } (x, y) = (B_0, B_1) \text{ ou } (B_0, B_2) \\ w - (1 + r + q) & \text{si } (x, y) = (B_1, I), (B_2, I), \text{ ou } (I, I) . \\ 0 & \text{dans tous les autres cas} \end{cases}$$

Ce flux modélise les revenus conditionnels au succès du groupe : le premier type de transition correspond à un remboursement standard, tandis que le second intègre la charge solidaire $q = \theta(1 + r)$ due à un partenaire défaillant. Les transitions vers des états d'échec (exclusion, défaut, retour à D) sont considérées comme non génératrices de revenu.

2.2. Théorie des chaînes de Markov avec revenu (CMR)

Le système dynamique décrit précédemment peut être représenté comme une chaîne de Markov enrichie d'une structure de flux monétaire. Cette approche permet de formaliser le concept de revenu espéré actualisé à partir d'une trajectoire contractuelle aléatoire. Elle s'inscrit dans le cadre général des chaînes de Markov avec revenu (CMR), introduites pour modéliser des systèmes où chaque transition d'état est associée à un gain (ou une perte) mesurable.

2.2.1. Cadre général

Nous considérons une chaîne de Markov homogène $(X_k)_{k \geq 0}$ à temps discret prenant ses valeurs dans un espace d'états fini S , et définie par une matrice de transition $P = (p_{ij})_{i,j \in S}$. À chaque couple de transitions $(i, j) \in S \times S$, nous associons un revenu $f(i, j) \in R$ représentant la valeur économique perçue au moment du passage de i vers j .

Définition 4.1 (Chaîne de Markov avec revenu) Une chaîne de Markov avec revenu est un couple (P, f) , où :

- P est la matrice de transition définissant la dynamique du processus sur S ;
- $f : S \times S \rightarrow R$ est une fonction de flux, attribuant un revenu à chaque transition.

Le revenu total actualisé, à partir d'un état initial $i_0 \in S$, est défini par :

$V(i_0) = \mathbb{E}_{i_0} [\sum_{k=0}^{\infty} \delta^k f(X_k, X_{k+1})]$, où $\delta \in (0, 1)$ est le facteur d'actualisation reflétant la préférence temporelle.

Ce cadre permet de capturer à la fois les aspects dynamiques du comportement des emprunteurs et la structure économique des flux induits par les contrats de microfinance.

2.2.2. Application au modèle solidaire

Dans notre modèle, la fonction de flux $f(i, j)$ est spécifiée en cohérence avec la structure de revenu définie à la section précédente. Elle se concentre uniquement sur les transitions génératrices de flux monétaires pour l'institution :

$$f(i, j) = \begin{cases} w - (1 + r) & \text{si } (i, j) \in \{(B_0, B_1) \text{ ou } (B_0, B_2)\} \\ w - (1 + r + q) & \text{si } (i, j) \in \{(B_1, I), (B_2, I), (I, I)\} \\ 0 & \text{dans tous les autres cas} \end{cases}$$

Ce revenu dépend :

- du montant w généré en cas de succès du projet ;
- du remboursement exigé $(1 + r)$ ou $(1 + r + q)$ selon le niveau de solidarité engagée ;
- et du succès effectif ou non de l'étape contractuelle.

À partir de cette structure, la valeur actualisée moyenne peut être obtenue en résolvant une équation de type Bellman matriciel : $V = f + \delta P V$, où V est le vecteur des valeurs actualisées à chaque état, et f est le vecteur des flux associés aux transitions depuis chaque état. Cette équation admet une solution explicite si $(I - \delta P)$ est inversible, ce qui est garanti ici par le fait que P est une matrice stochastique et $\delta \in (0, 1)$.

La solution est alors donnée par : $V = (I - \delta P)^{-1} f$, ce qui permet de déterminer, pour tout état probatoire (notamment B_0), la valeur attendue du contrat de prêt solidaire à long terme.

Ce cadre analytique sera illustré dans la section suivante à travers une série de simulations numériques.

3. Résultats

3.1. Analyse numérique des revenus espérés

Dans cette section, nous illustrons le comportement du revenu actualisé attendu en fonction des paramètres du contrat, en nous plaçant dans une perspective de simulation. L'objectif est d'évaluer l'impact des choix contractuels sur la performance économique du modèle, en particulier dans la phase probatoire représentée par l'état B_0 .

3.1.1. Transition initiale vers la progression

Nous nous intéressons d'abord à la valeur actualisée du contrat pour un emprunteur entrant dans le système par l'état B_0 , et réalisant une première transition réussie vers l'état B_1 , indiquant un début de stabilité du groupe. La valeur considérée est : $V(B_0 \rightarrow B_1) = \mathbb{E}_{B_0}[\sum_{k=0}^{\infty} \delta^k f(X_k, X_{k+1}) | X_1 = B_1]$, où f désigne la fonction de flux définie précédemment, et $\delta \in (0, 1)$ est le facteur d'actualisation.

Nous fixons les paramètres suivants pour la simulation : $w = 2, r = 0.2, \theta = 0.5, \gamma = 0.9, \delta = \frac{1}{1+0.1} \approx 0.909$.

La figure suivante représente $V(B_0 \rightarrow B_1)$ en fonction de la probabilité de succès individuelle α :

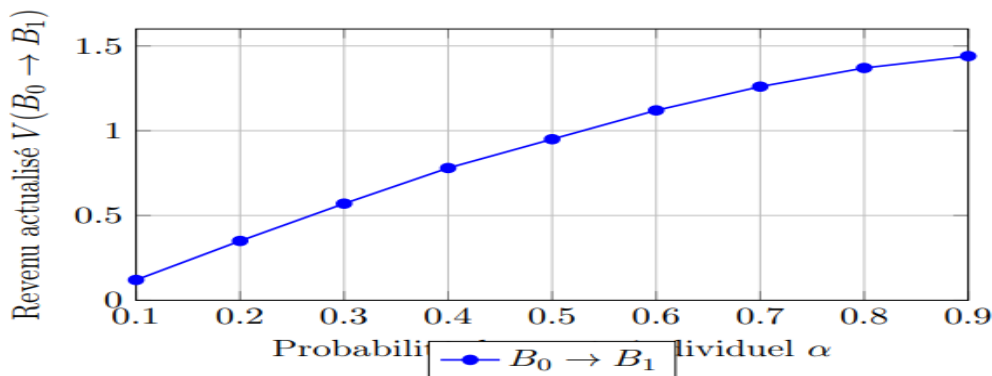


Figure N°2 : Revenu actualisé attendu en fonction de α pour la transition $B_0 \rightarrow B_1$

Source : Auteur

3.1.2. Surface de viabilité économique

Nous explorons maintenant l'impact combiné du taux d'intérêt r et du coefficient de solidarité θ sur le revenu actualisé pour une probabilité de succès fixée à $\alpha = 0.8$. L'objectif est d'identifier les configurations (r, θ) garantissant une rentabilité positive en phase probatoire.

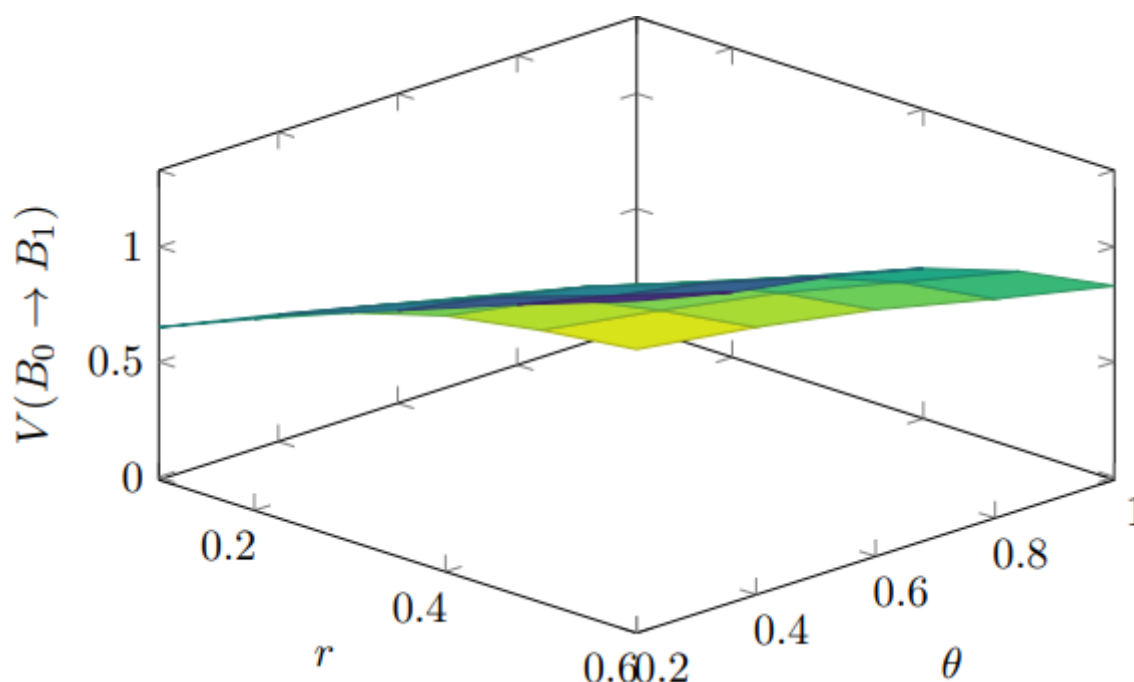


Figure N°3 : Surface du revenu actualisé espéré en fonction de r et θ (pour $\alpha = 0.8$)

Source : Auteur

3.1.3. Interprétation des simulations

Les simulations mettent en évidence plusieurs faits stylisés :

- Le revenu actualisé augmente avec la probabilité de succès α , mais tend à se stabiliser au-delà d'un certain seuil.
- Des taux d'intérêt modérés associés à un niveau de solidarité raisonnable ($\theta \in [0.3, 0.6]$) assurent une rentabilité robuste dans les phases probatoires.
- Une solidarité excessive (θ proche de 1) peut engendrer une pression désincitative sur les membres performants du groupe. Cette analyse valide la pertinence du calibrage contractuel et souligne l'importance de la phase probatoire dans la rentabilité globale du système.

3.2. Optimisation dynamique des paramètres

Au-delà de l'analyse ponctuelle des transitions, il est essentiel pour une institution de microfinance de concevoir un contrat $C(r, \theta, T)$ qui maximise la rentabilité à long terme tout en respectant des exigences d'inclusion sociale. Cette section formalise ce problème sous forme d'un programme d'optimisation dynamique, fondé sur les propriétés stationnaires de la chaîne de Markov.

3.2.1. Formulation du problème

Soit $\pi = (\pi_i)_{i \in S}$ la distribution stationnaire du processus markovien associé au contrat $C(r, \theta, T)$. Le revenu moyen espéré par emprunteur, noté $R(r, \theta, T)$, est défini comme :

$$R(r, \theta, T) = \sum_{i,j \in S} \pi_i \cdot p_{ij}(r, \theta, T) \cdot f(i, j),$$

où $f(i, j)$ est le flux de revenu associé à la transition de i vers j , tel que défini précédemment.

Le problème d'optimisation consiste alors à maximiser ce revenu sous des contraintes contractuelles :

$$\max_{r, \theta, T} R(r, \theta, T)$$

sous contraintes : $r \in [r_{\min}, r_{\max}]$,

$$\theta \in [0, 1],$$

$$T \in \mathbb{N}, T \leq T_{\max},$$

$$\pi_{inc}(r, \theta, T) \geq \tau,$$

où π_{inc} désigne la proportion stationnaire d'emprunteurs dans un état d'inclusion (B_1, I , etc.), et $\tau \in [0.5, 0.8]$ représente un seuil minimal d'inclusion exigé pour des raisons sociales.

3.2.2. Exploration numérique et zones optimales

Nous explorons maintenant numériquement la fonction $R(r, \theta, T)$ pour différentes combinaisons des paramètres contractuels. Pour cette illustration, nous fixons $T = 2$ et représentons la surface du revenu moyen stationnaire en fonction de r et θ .

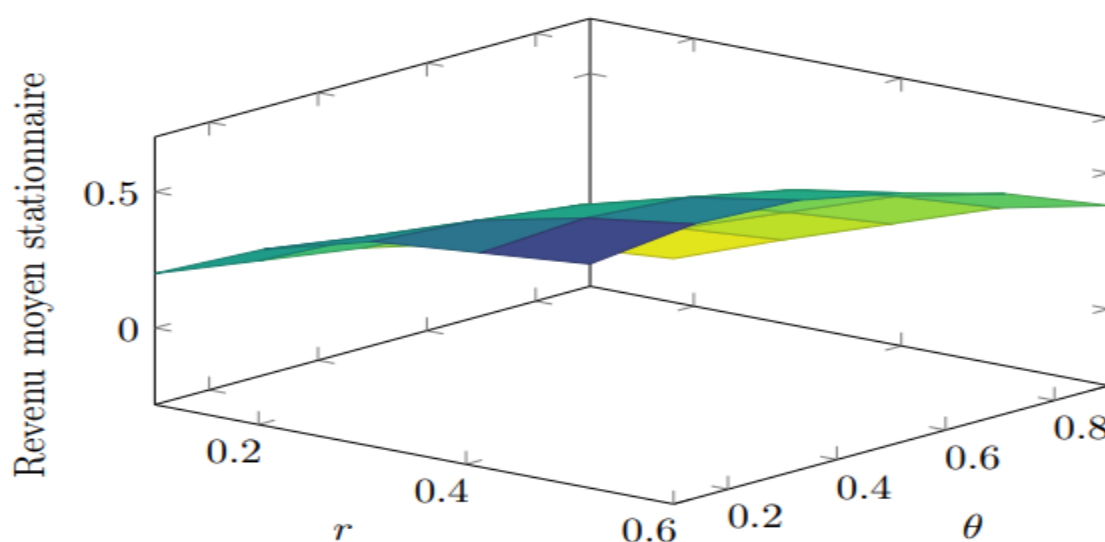


Figure N°4 : Revenu stationnaire moyen en fonction de r et θ pour $T = 2$

Source : Auteur

3.2.3. Interprétation économique

L'analyse numérique permet de dégager plusieurs enseignements utiles :

- Une hausse excessive du taux r peut nuire à la probabilité de réussite des projets, et donc au revenu global, malgré l'augmentation du remboursement nominal.

- Un degré de solidarité trop élevé ($\theta \approx 1$) accroît la pression financière sur les emprunteurs performants, ce qui peut réduire leur adhésion au dispositif.
- Des niveaux intermédiaires de θ (typiquement entre 0.3 et 0.6) assurent un bon équilibre entre partage du risque et incitations individuelles.

3.2.4. Stratégie de calibration optimale

En pratique, le contrat optimal (r^*, θ^*, T^*) peut être obtenu par des méthodes numériques comme :

- l'exploration sur grille discrète,
- des algorithmes de descente de gradient,
- ou des heuristiques évolutives (algorithmes génétiques, etc.).

L'objectif est de satisfaire simultanément : $R(r^*, \theta^*, T^*) = \max R(r, \theta, T)$ avec $\pi_{inc}(r^*, \theta^*, T^*) \geq \tau$.

Cette optimisation permet à l'institution d'adapter finement ses offres contractuelles aux profils de sa clientèle cible, à sa tolérance au risque de défaut, et à ses objectifs d'inclusion durable.

3.3. Extension multi-agents et effet de groupe

Jusqu'ici, le modèle était centré sur un groupe composé de deux emprunteurs solidaires. Dans cette section, nous généralisons la modélisation à un groupe de taille arbitraire $n \geq 2$, afin d'étudier l'effet de la taille du groupe sur les incitations économiques et le revenu net moyen perçu par l'institution de microfinance.

3.3.1. Modélisation d'un groupe de taille n

Nous considérons un groupe homogène de n emprunteurs. Chaque membre mène un projet indépendant, avec une probabilité de succès individuelle $\alpha \in (0, 1)$. Les hypothèses retenues sont les suivantes :

- Tous les projets ont le même rendement w et sont soumis au même taux d'intérêt r ;
- En cas de défaut d'un ou plusieurs membres, la responsabilité est répartie équitablement entre les membres non défaillants ;
- La solidarité est partielle, avec un facteur $\theta \in [0, 1]$ représentant la part du défaut transférée à chaque emprunteur solvable.

3.3.2. Fonction de revenu agrégée

Nous notons k le nombre de membres en défaut parmi les $n - 1$ autres emprunteurs. Ce nombre suit une loi binomiale : $k \sim B(n - 1, 1 - \alpha)$. Un emprunteur performant supporte une charge solidaire donnée par : $q_n(k) = \frac{k}{n-1} \cdot \theta(1 + r)$, ce qui conduit à un flux net

individuel (conditionné à la réussite) : $f_n(k) = w - (1 + r + q_n(k)) = w - (1 + r) \left(1 + \theta \cdot \frac{k}{n-1}\right)$. La valeur moyenne du flux net espéré par emprunteur fiable est donc : $\mathbb{E}[f_n] = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (1 - \alpha)^k \alpha^{n-1-k} \cdot f_n(k)$.

3.3.3. Effet de la taille du groupe

Nous analysons ici l'évolution de $\mathbb{E}[f_n]$ en fonction de la taille n . La figure suivante illustre cette dépendance, pour des paramètres fixés à : $w = 2, r = 0.2, \theta = 0.5, \alpha = 0.75$.

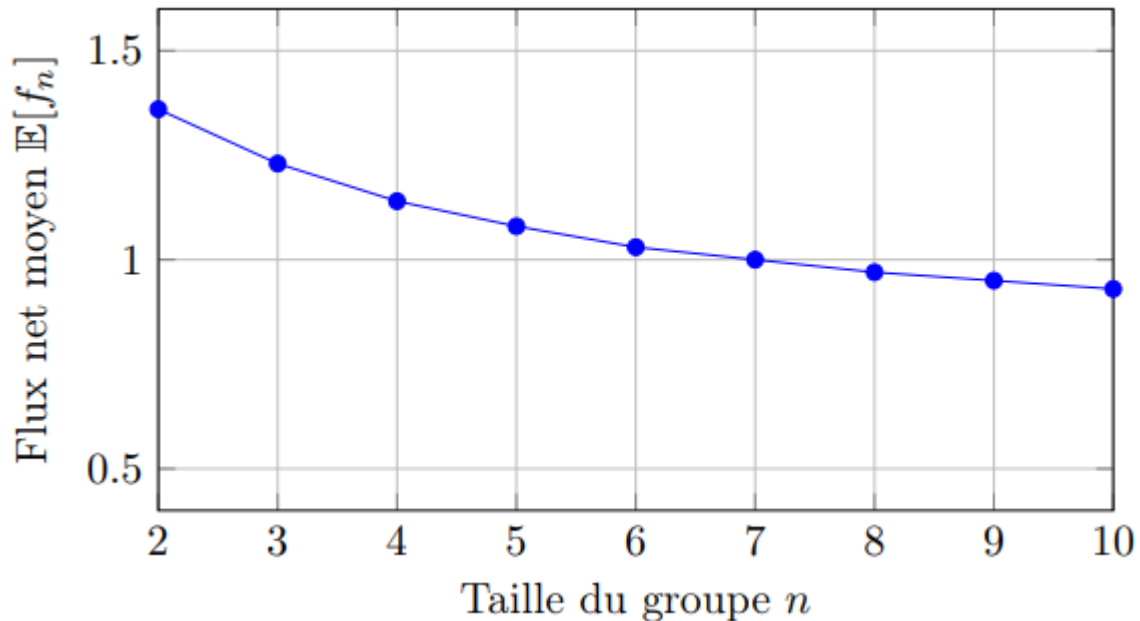


Figure N°5 : Évolution du revenu net moyen en fonction de la taille du groupe ($\alpha = 0.75$)

Source : Auteur

3.3.4. Interprétation économique

Les résultats montrent une décroissance progressive du revenu net moyen par membre actif à mesure que la taille du groupe augmente. Cela s'explique par la probabilité croissante d'avoir plusieurs défauts dans un groupe large, ce qui amplifie la charge redistribuée à chaque membre solvable.

Nous en déduisons l'existence d'une **taille optimale du groupe** : au-delà d'un certain seuil, l'effet positif de la mutualisation du risque est contrebalancé par le coût croissant induit par la solidarité. Ce résultat offre un critère opérationnel aux institutions de microfinance pour calibrer la taille des groupes solidaires.

4. Discussion

Les résultats obtenus à travers la modélisation markovienne et les simulations numériques soulignent l'importance des paramètres contractuels dans la viabilité du prêt solidaire.

Toutefois, l'évaluation théorique n'a de sens que replacée dans une perspective comparative, afin de mesurer l'apport net du dispositif proposé par rapport aux mécanismes existants. C'est pourquoi cette section confronte notre modèle de prêt solidaire progressif et réversible aux deux principaux schémas présents dans la littérature et la pratique : le prêt individuel et le prêt groupé classique.

Au-delà de comparaison, plusieurs prolongements méritent d'être discutés. L'intégration de variables contextuelles (culture de solidarité, réseaux sociaux locaux) constitue une piste prometteuse pour affiner la dynamique contractuelle. De même, la traduction du modèle en guides opérationnels simples (abaques, tableurs) faciliterait son appropriation par les praticiens de la microfinance. Enfin, l'essor des technologies numériques, notamment les applications mobiles de suivi et le credit scoring, ouvre des perspectives nouvelles pour la mise en œuvre du prêt solidaire dans des contextes économiques et géographiques diversifiés.

4.1. Comparaison entre prêt groupé et prêt individuel

L'efficacité d'un mécanisme de microcrédit dépend autant de sa rentabilité économique que de sa capacité à accompagner les emprunteurs vers une inclusion durable. Cette section compare deux dispositifs : le prêt individuel classique et le prêt groupé avec solidarité partielle, en mettant en lumière l'apport spécifique de notre modélisation, fondée sur un processus **progressif et probatoire**, absent dans la littérature antérieure.

4.1.1. Le prêt individuel : autonomie sans filet

Le modèle individuel repose sur la responsabilité exclusive de l'emprunteur. Chaque projet aboutit ou échoue indépendamment des autres, sans partage de risque ni soutien collectif. L'institution accorde ou refuse le crédit sur la base de la seule probabilité de succès α .

$$\mathbb{E}[f_{indiv}] = \alpha \cdot (w - (1 + r))$$

Ce mécanisme est simple mais exposé : en cas de défaillance, aucun amortisseur ne protège ni l'emprunteur, ni l'institution.

4.1.2. Le prêt groupé classique : mutualisation immédiate

Dans la version traditionnelle du prêt solidaire, tous les membres d'un groupe partagent immédiatement la responsabilité en cas de défaut. La solidarité est appliquée sans phase transitoire, ce qui crée à la fois des incitations collectives fortes, mais aussi une pression immédiate sur les performants.

4.1.3. Notre modèle : intégration progressive et solidarité différée

L'originalité du modèle proposé réside dans l'introduction :

- d'un état probatoire B_0 , dans lequel l'institution teste la fiabilité du groupe sans engager immédiatement la solidarité ;
- d'un état de progression B_1 ou de recomposition B_2 , accessible après une première réussite, qui conditionne le passage vers l'inclusion durable ;
- d'un état d'inclusion I , avec conditions préférentielles (taux réduit) pour les emprunteurs performants sur la durée.

Ce schéma introduit une trajectoire progressive qui **limite les effets de seuil, évite l'exclusion prématurée, et récompense la régularité.**

4.1.4. Illustration numérique

Avec $w = 2, r = 0.2, \theta = 0.5, n = 3$, nous comparons les revenus espérés selon la probabilité de succès α :

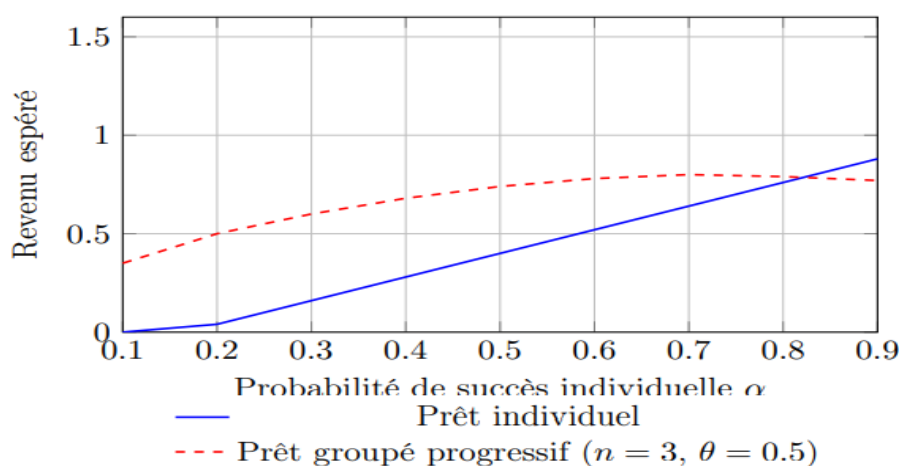


Figure N°6 : Comparaison des revenus espérés selon α

Source : Auteur

4.1.5. Tableau comparatif des modèles

Critères	Prêt individuel	Prêt classique groupé	Modèle proposé
Solidarité	Aucune	Immédiate et intégrale	Progression après probation
Phase d'essai (probatoire)	Non	Non	Oui (état B_0)
Récompense de la fidélité	Non	Faible	Oui (état I avec taux réduit)
Gestion du risque de défaut	Isolé	Mutualisé dès le début	Mutualisé après test
Sortie du système après échec	Définitive ou libre	Parfois définitive	Exclusion temporaire réversible
Incitation individuelle	Forte	Moyenne (pression du groupe)	Maintenue grâce à différé de solidarité

Adaptabilité contractuelle	Faible	Moyenne	Forte via (r, θ, T)
-----------------------------------	--------	---------	----------------------------

Tableau N°1 : Comparaison des dispositifs de microcrédit

Source : Auteur

4.1.6. Lien avec la littérature

Notre approche affine et étend plusieurs résultats classiques :

- [9] insistent sur le pouvoir disciplinaire de la solidarité. Nous conservons cet effet mais le différons stratégiquement via l'état B_0 .
- [20] et [21] soulignent l'importance de la formation endogène des groupes. Notre modèle pourrait intégrer ce facteur via des probabilités conditionnelles de réussite.
- [24,25] développent une chaîne markovienne avec exclusion. Nous allons plus loin avec une trajectoire réversible et une inclusion stationnaire.
- [26] proposent une formulation analytique du revenu actualisé. Nous la mobilisons ici pour optimiser les paramètres contractuels (r, θ, T) .

4.2. Intégration des variables contextuelles

Un prolongement naturel de ce travail consiste à intégrer explicitement les variables socio-culturelles qui influencent la réussite des dispositifs solidaires. La culture de solidarité, l'intensité des réseaux sociaux locaux et les normes communautaires constituent en effet des déterminants majeurs du comportement des emprunteurs. Plusieurs études empiriques ont montré que ces facteurs conditionnent l'efficacité du remboursement collectif, tant en Afrique (Bangoura, 2010) qu'en Asie (Banerjee et al., 2015). Dans notre cadre, ils pourraient être modélisés par des paramètres additionnels modifiant la probabilité de succès individuelle ou l'intensité de la solidarité contractuelle. Ce prolongement ouvre des pistes prometteuses pour une analyse plus contextuelle et pour des validations empiriques futures.

4.3. Guides opérationnels pour les praticiens

L'un des prolongements utiles de cette recherche réside dans la traduction du modèle mathématique en outils pratiques accessibles aux institutions de microfinance. À partir des équations stationnaires et des simulations numériques, il est en effet possible de développer des guides opérationnels permettant aux gestionnaires de calibrer rapidement les paramètres contractuels essentiels : taux d'intérêt r , degré de solidarité θ et durée d'exclusion T .

Par exemple, des abaques ou tableaux de décision pourraient être élaborés en fonction des probabilités de succès estimées des projets (α) , indiquant directement les zones de viabilité économique et sociale du contrat. De même, des logiciels ou tableurs simples pourraient

automatiser le calcul du revenu stationnaire espéré en fonction des choix contractuels, sans exiger la maîtrise de la théorie markovienne.

Ces outils constitueraient un pont entre la formalisation théorique et la pratique quotidienne, et faciliteraient l'appropriation du modèle par les institutions locales de microfinance. Ils contribueraient ainsi à rendre opérationnelle l'approche proposée, au-delà de sa pertinence analytique.

4.4. Impact des technologies numériques

Un autre axe d'extension concerne l'intégration des technologies numériques dans la mise en œuvre des contrats solidaires. Le recours aux applications mobiles et aux plateformes numériques de suivi peut faciliter la gestion des remboursements, la communication entre membres d'un groupe et l'alerte précoce en cas de défaut. De même, les outils de credit scoring basés sur l'analyse de données (revenus, historique de paiement, indicateurs sociaux) permettent d'adapter les paramètres contractuels aux profils des emprunteurs, en affinant la probabilité de succès α utilisée dans notre modèle.

Ces innovations offrent la possibilité de réduire les coûts de transaction pour les institutions de microfinance tout en renforçant la transparence et la traçabilité des flux. Elles contribuent aussi à améliorer l'inclusion financière dans des zones rurales isolées où la surveillance mutuelle reste limitée. L'intégration du numérique apparaît ainsi comme un levier complémentaire au contrat progressif et réversible proposé dans ce travail.

4.5. Conclusion de la discussion

L'analyse comparative met en évidence que notre modèle de prêt solidaire progressif et réversible offre une architecture plus souple que les dispositifs traditionnels. En différant la solidarité jusqu'à ce que la fiabilité soit démontrée, il limite les effets pervers d'une mutualisation trop précoce et récompense la fidélité par des conditions préférentielles. La gestion graduée des défauts et la dynamique d'inclusion réversible renforcent par ailleurs la résilience du dispositif en environnements incertains.

Ces apports théoriques doivent cependant être complétés par des prolongements pratiques et contextuels. L'intégration de variables socio-culturelles (culture de solidarité, réseaux communautaires) permettrait d'ancrer le modèle dans des réalités locales plus nuancées. De même, la conception de guides opérationnels sous forme de tableaux de décision ou d'outils numériques simplifiés favoriserait l'appropriation du cadre théorique par les praticiens. Enfin, l'essor des technologies numériques, via les applications mobiles et le credit scoring, ouvre des perspectives concrètes pour adapter et déployer ce type de contrat dans des contextes variés.

Ainsi, la discussion montre que le modèle proposé constitue non seulement une avancée analytique, mais aussi une base fertile pour des développements futurs visant à rapprocher la théorie de la pratique en microfinance solidaire. A cet égard, notre modèle introduit une architecture comportementale plus souple et plus réaliste :

- une solidarité conditionnelle à la fiabilité prouvée,
- une gestion graduée des défauts,
- une incitation dynamique fondée sur la progression contractuelle.

Ces éléments offrent un cadre plus robuste pour concevoir des mécanismes de microcrédit adaptés aux contextes incertains, tout en préservant les objectifs d'inclusion durable et de viabilité financière.

Conclusion

Cet article a proposé une modélisation markovienne innovante du prêt solidaire en microfinance, intégrant une phase probatoire, une trajectoire d'inclusion progressive et des mécanismes d'exclusion réversibles. Cette architecture théorique permet d'analyser avec rigueur les comportements des emprunteurs tout en optimisant les paramètres contractuels de long terme. Par rapport aux modèles classiques de prêt individuel ou de solidarité immédiate, notre approche introduit une progressivité contractuelle qui limite les effets pervers d'une solidarité précipitée et récompense la fidélité par des conditions préférentielles.

Les principaux apports de cette recherche résident dans : (i) la formalisation mathématique d'un contrat solidaire progressif ; (ii) l'utilisation des chaînes de Markov avec revenu pour calculer le revenu actualisé moyen ; (iii) la démonstration d'un régime stationnaire viable sous contrainte d'inclusion sociale ; et (iv) la comparaison explicite avec le prêt individuel, mettant en évidence les conditions sous lesquelles la solidarité améliore la rentabilité.

Cependant, plusieurs limites doivent être soulignées. Premièrement, l'absence de validation empirique réduit pour l'instant la portée pratique du modèle. Deuxièmement, la complexité technique inhérente à la formalisation markovienne peut limiter son appropriation par les praticiens de terrain. Troisièmement, le modèle reste centré sur des paramètres contractuels abstraits, sans prise en compte explicite des spécificités socio-culturelles ou technologiques des environnements de microfinance.

Ces limites ouvrent des perspectives de recherche et d'application. D'une part, des enquêtes empiriques menées en partenariat avec des institutions de microfinance pourraient permettre de calibrer les paramètres du modèle et de tester sa pertinence prédictive. D'autre part, l'élaboration de guides opérationnels, sous forme de tableaux de décision ou de tableurs

automatisés, faciliterait l'usage pratique du modèle par les gestionnaires. En outre, l'intégration des technologies numériques — applications mobiles de suivi, credit scoring basé sur les données — représente une voie prometteuse pour renforcer la traçabilité et l'efficacité des dispositifs. Enfin, l'introduction de variables contextuelles, telles que la culture de solidarité ou l'intensité des réseaux sociaux locaux, permettrait d'affiner la dynamique contractuelle et d'ancrer le modèle dans des réalités communautaires diversifiées.

En définitive, ce travail constitue une contribution théorique substantielle à la conception de contrats de microfinance plus flexibles et inclusifs. Il jette les bases d'une nouvelle génération de dispositifs conciliant viabilité économique, équité comportementale et adaptation aux contextes sociaux et technologiques.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Adler, P.S. & Kwon, S.W. (2002). Social Capital : Prospects for a New Concept. *Academy of Management Review*, 27(1), 17-40.
- [2] Armendáriz de Aghion, B. & Morduch, J. (2000). Microfinance Beyond Group Lending. *Economics of Transition*, 8(2), 401-420.
- [3] Armendáriz de Aghion, B. & Gollier, C. (2000). Peer Group Formation in an Adverse Selection Model. *The Economic Journal*, 110(465), 632-643.
- [4] Baldi, P., Mazliak, L. & Priouret, P. (1998). *Martingales et chaînes de Markov*. Paris : Hermann.
- [5] Banerjee, A., Duflo, E., Glennerster, R. & Kinnan, C. (2015). The Miracle of Microfinance ? Evidence from a Randomized Evaluation. *American Economic Journal : Applied Economics*, 7(1), 22-53.
- [6] Bangoura, L. (2010). Contrat de crédit, risque moral, sélection adverse et incitation à l'effort pour le remboursement en microfinance. *Centre de Recherche sur les Stratégies Économiques*, 1-38.
- [7] Bester, H. (1985). Screening vs. Rationing in Credit Markets with Imperfect Information. *American Economic Review*, 75(4), 850-855.
- [8] Bester, H. (1987). The Role of Collateral in Credit Markets with Imperfect Information. *European Economic Review*, 31(4), 887-899.
- [9] Besley, T. & Coate, S. (1995). Group Lending, Repayment Incentives and Social Collateral. *Journal of Development Economics*, 46(1), 1-18.
- [10] Bouleau, N. (1988). *Processus stochastiques et applications*. Paris : Hermann.

- [11] Chung, K.L. (1967). Markov Chains with Stationary Transition Probabilities. Berlin : Springer.
- [12] Conning, J. (1996). Rural Informal Moneylenders in Chile : Where Have They Gone ? Communication présentée à la réunion de la Western Economic Association, San Francisco.
- [13] Delmas, J.-F. (2010). Introduction au calcul des probabilités et à la statistique. Les Presses de l'ENSTA.
- [14] Dhib, N., Diener, F. & Diener, M. (2013). Modélisation mathématique du flux espéré d'un micro-entrepreneur. *Econometrica*, 81(6), 231-245.
- [15] Diener, F., Diener, M. & Dhib, N. (2016). Valeur espérée d'un microcrédit dans un modèle de chaîne de Markov. HAL Archives Ouvertes, hal-01324501.
- [16] Doeblin, W. (1938). Exposé de la théorie des chaînes simples constantes de Markov à un nombre fini d'états. *Revue de Mathématiques de l'Union Interbalkanique*, 2, 77-105.
- [17] Field, J. (2004). Social Capital. New York : Routledge.
- [18] Franchi, J. (2013). Processus aléatoires à temps discret. Paris : Ellipses.
- [19] Ghatak, M. (1999). Group Lending, Local Information and Peer Selection. *Journal of Development Economics*, 60(1), 27-50.
- [20] Ghatak, M. & Guinnane, T. (1999). The Economics of Lending with Joint Liability : Theory and Practice. *Journal of Development Economics*, 60(1), 195-228.
- [21] Ghatak, M. (2000). Screening by the Company You Keep : Joint Liability Lending and the Peer Selection Effect. *The Economic Journal*, 110(465), 601-631.
- [22] Green, E. & Porter, R. (1984). Non-cooperative Collusion under Imperfect Price Information. *Econometrica*, 52(1), 87-100.
- [23] Hulme, D. & Mosley, P. (1996). Finance Against Poverty. New York : Routledge.
- [24] Khodr, O. & Diener, F. (2008). Mathematical Models for Individual and Group Lending in Microfinance. Université de Nice, Laboratoire de Mathématiques.
- [25] Khodr, O. (2011). Modèles dynamiques des innovations du microcrédit. Thèse de doctorat, Université de Nice.
- [26] Djaffar Lessy, N., Dhib, N., Diener, F. & Diener, M. (2021). May Microcredit Lead to Inclusion ? *SIAM Journal*, 12(3), 898-911.
- [27] Laffont, J.-J. & N'Guessan, T.T. (1999). Group Lending with Adverse Selection. *European Economic Review*, 43(4), 773-784.
- [28] Morduch, J. (2019). How Microfinance Really Works. New Haven : Yale University Press.
- [29] Neveu, J. (1972). Martingales à temps discret. Paris : Masson.

- [30] Pardoux, E. (2006). Processus de Markov et applications. Marseille : Université de Provence.
- [31] Stiglitz, J.E. (1990). Peer Monitoring and Credit Markets. World Bank Economic Review, 4(3), 351-366.
- [32] Stroock, D.W. (2005). An Introduction to Markov Processes. Berlin : Springer.
- [33] Tedeschi, G.A. (2006). Here Today, Gone Tomorrow : Can Dynamic Incentives Make Microfinance More Flexible ? Journal of Development Economics, 80(1), 84-105.
- [34] Ghosh, S. & Van Tassel, E. (2007). Microfinance, Subsidies and Dynamic Incentives. Working Paper 07001, Florida Atlantic University.